50 DE IDEI

PE CARE TREBUIE SĂ LE CUNOȘTI

MATEMATICĂ

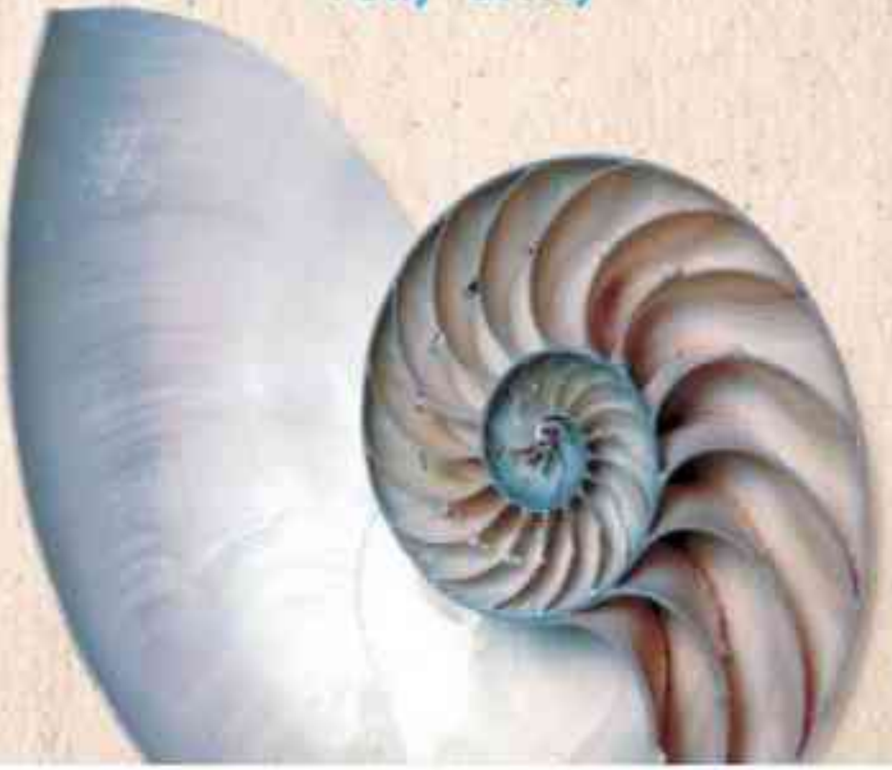
Tony Crilly

50 DE IDEI

PE CARE TREBUIE SĂ LE CUNOȘTI

MATEMATICĂ

Tony Crilly



50
DE IDEI
PE CARE TREBUIE SA LE CUNOȘTI

MATEMATICĂ

Tony Crilly

BUCUREȘTI, 2017

Cuprins

Introducere

01 Zero
02 Sisteme de numerație
03 Fracții
04 Pătrate și rădăcini pătrate
05 π
06 e
07 Infinitul
08 Numere imaginare
09 Numere prime
10 Numere perfecte
11 Numere Fibonacci
12 Dreptunghiuri de aur
13 Triunghiul lui Pascal
14 Algebra
15 Algoritmul lui Euclid
16 Logica
17 Demonstrația
18 Mulțimi
19 Calcul diferențial și integral
20 Construcții
21 Triunghiuri
22 Curbe
23 Topologie
24 Dimensiune
25 Fractali
26 Haos
27 Postulatul paralelelor
28 Geometria discretă
29 Grafuri
30 Problema celor patru culori
31 Probabilitate
32 Teoria lui Bayes
33 Problema zilei de naștere
34 Distribuții
35 Curba normală
36 Legătura dintre date
37 Genetică
38 Grupuri
39 Matrici
40 Coduri
41 Aritmetică avansată
42 Pătrate magice
43 Pătrate latine
44 Matematica banilor
45 Problema dietei
46 Comis-voiajorul
47 Teoria jocurilor
48 Relativitate
49 Ultima teoremă a lui Fermat
50 Ipoteza Riemann

Glosar

Indice

Introducere

Matematica este un domeniu vast, pe care nimeni nu îl poate cunoaşte în întregime. Ceea ce poate fiecare să facă este să exploreze şi să găsească o cale individuală. Posibilităţile care ni se deschid ne vor conduce în alte vremuri şi în alte culturi, către idei care îi preocupă de secole pe matematicieni.

Matematica este, în acelaşi timp, străveche şi modernă, formată sub vaste influenţe culturale şi politice. Din India şi Arabia ne-am dobândit sistemul modern de numeraţie, în care se amestecă şi alte repere istorice. Baza „60" a babilonienilor ce au trăit cu două–trei mii de ani înainte de Hristos apare în cultura noastră – avem 60 de secunde într-un minut şi 60 de minute într-o oră, unghiul drept are şi acum 90 de grade, nu 100, cum s-a adoptat în Franţa revoluţionară ca o primă măsură a sistemului zecimal de măsurare.

Triumfurile tehnologice din epoca modernă depind de matematică şi cu siguranţă că nu mai există nici urmă de mândrie în a anunţa că nu ai fost bun la matematică în şcoală. Bineînţeles că matematica din şcoală este altceva, predată deseori cu gândul la examene. Presiunea timpului nu ajută nici ea, pentru că matematica este un domeniu în care rapiditatea nu este o calitate. Oamenii au nevoie de timp, ca să permită ideilor să se sedimenteze. Unii dintre cei mai mari matematicieni au dovedit o lentoare chinuitoare în înţelegerea conceptelor profunde din domeniul lor.

Zăboviţi atât cât este nevoie în paginile acestei cărţi ca să descoperiţi ce înseamnă cu adevărat ideile acestea, despre care poate aţi mai auzit. Începând cu Zero sau cu orice alt capitol doriţi, puteţi călători între insulele ideilor matematicii. De exemplu, puteţi să vă familiarizaţi cu Teoria jocurilor şi apoi să citiţi despre Pătratele magice. La fel de bine puteţi merge de la Dreptunghiurile de aur la celebra teoremă a lui Fermat.

Trăim vremuri captivante pentru matematică. Unele dintre marile ei probleme şi-au găsit recent soluţii. Dezvoltarea computerelor moderne a ajutat la rezolvarea unora, dar s-a dovedit neputincioasă în cazul altora. Problema celor patru culori a fost rezolvată cu ajutorul unui computer, dar ipoteza Riemann, ultimul capitol al cărţii, rămâne nerezolvată – de către computere sau prin alte mijloace.

Matematica este pentru toţi. Popularitatea de care se bucură Sudoku este dovada că oamenii pot face matematică (fără să ştie) şi să le şi placă. La fel ca în pictură sau în muzică, şi în matematică au existat genii, dar nu se reduce totul la ele. Veţi vedea personaje marcante care intră şi ies în unele capitole doar ca să reapară în altele. Leonhard Euler, al cărui tricentenar a fost marcat în 2007, este un vizitator frecvent al acestor pagini. Dar progresul real al matematicii este rezultatul muncii „celor mulţi", care se acumulează de-a lungul secolelor. Alegerea celor 50 de subiecte este una personală, dar am încercat să păstrez un echilibru. Există subiecte banale şi subiecte avansate, de matematică pură şi de matematică aplicată, abstracte şi concrete, vechi şi noi. Matematica este, însă, un domeniu unitar, iar dificultatea scrierii acestei cărţi nu a stat în alegerea subiectelor, ci în renunţarea la altele. Ar fi putut să fie 500 de idei, dar 50 sunt suficiente pentru un început solid al carierei dumneavoastră în matematică.

01 Zero

În lumea numerelor intrăm cu pași nesiguri, de la o vârstă fragedă. Învățăm că 1 este primul din „alfabetul numerelor" și că el introduce numerele naturale 1, 2, 3, 4, 5... Numerele naturale sunt cele care numără lucruri reale – mere, portocale, banane, pere. Abia mai târziu învățăm să numărăm și merele dintr-o cutie în care nu este nici un măr.

Până și grecii din Antichitate, care au adus progrese însemnate științelor și matematicii, sau romanii, renumiți pentru realizările lor inginerești, erau lipsiți de o modalitate efectivă de a trata subiectul numărului de mere dintr-o cutie goală. Ei nu au reușit să dea „nimicului" un nume. Romanii aveau modul lor de a combina I, V, X, L, C, D și M, dar unde era 0? Ei nu numărau „nimicul".

CUM A FOST ACCEPTAT ZERO?

Se crede că folosirea unui simbol care să desemneze „nimicul" își are originea cu mii de ani în urmă. Civilizația Maya, din ceea ce este astăzi Mexic, folosea zero în diferite forme. Puțin mai târziu, astronomul Claudius Ptolemeu, sub influența babilonienilor, a folosit un simbol înrudit cu 0 modern, ca să ocupe locul gol din sistemul său numeric. Ca ocupant al locului gol, zero putea fi folosit, de exemplu, pentru a face distincția între 75 și 705 (în notația modernă), în loc de a se baza pe context, cum procedau babilonienii. Acest lucru poate fi comparat cu introducerea virgulei în scriere – ambele ajută la citirea înțelesului corect. Dar, la fel cum virgula vine cu un set de reguli de utilizare, era nevoie de reguli și pentru folosirea lui zero.

În secolul al VII-lea, matematicianul indian Brahmagupta îl considera pe zero ca pe un „număr", nu doar un substituent, o umplutură a unui loc gol, și a stabilit reguli pentru folosirea lui. Acestea erau „suma dintre un număr pozitiv și zero este un număr pozitiv" și „suma dintre zero și zero este zero". Gândindu-se la zero mai degrabă ca la un număr decât ca la un substituent, Brahmagupta era destul de revoluționar. Sistemul de numerație indo-arab, care îl includea pe zero, a fost promovat în Occident de Leonardo din Pisa – Fibonacci – în lucrarea sa *Liber Abaci (Cartea numărării)*, publicată pentru prima dată în 1202. Crescut în nordul Africii și familiarizat din școală cu aritmetica

CRONOLOGIE

700 î.Hr.
Babilonienii folosesc zero ca substituent pentru locul gol din sistemul lor numeric.

628 d.Hr.
Brahmagupta folosește zero și enunță reguli pentru folosirea lui cu alte numere.

830
Mahavira enunță idei despre modul în care zero interacționează cu alte numere.

indo-arabă, el a recunoscut forța folosirii simbolului suplimentar 0, în combinație cu simbolurile hinduse 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9.

Introducerea lui zero în sistemul de numerație a pus o problemă de care Brahmagupta s-a ocupat doar în trecere: cum trebuia tratat acest „intrus"? El a făcut începutul, dar recomandările lui erau vagi. Cum putea fi integrat zero în sistemul existent al aritmeticii de o manieră mai precisă? Unele ajustări au venit imediat. Când era vorba despre adunare și despre înmulțire, 0 funcționa perfect, dar operațiunile de scădere și de împărțire nu se împăcau prea ușor cu „intrusul". Era nevoie de precizări de conținut, pentru ca 0 să se armonizeze cu restul aritmeticii acceptate.

CUM FUNCȚIONEAZĂ ZERO?

Adunarea și înmulțirea cu zero sunt clare și fără controverse – poți adăuga 0 la 10 ca să obții 100, dar ne vom referi la „adunare" în sensul mai puțin imaginativ al operațiunii numerice. Adunarea lui 0 la un număr lasă acel număr neschimbat, pe când înmulțirea lui 0 cu orice număr dă întotdeauna rezultatul 0. De exemplu, avem $7 + 0 = 7$ și $7 \times 0 = 0$. Scăderea este o operațiune simplă, dar poate duce la numere negative, $7 - 0 = 7$ și $0 - 7 = -7$. Împărțirea la zero ridică însă dificultăți.

Să ne imaginăm că măsurăm o lungime cu ajutorul unei rigle. Să presupunem că rigla are 7 unități de lungime. Ne interesează de câte ori putem așeza rigla noastră pe lungimea dată. Dacă lungimea care trebuie măsurată este 28, răspunsul este 28 împărțit la 7 sau, în simboluri, $28 \div 7 = 4$. O notație mai bună pentru a exprima această împărțire este

$$\frac{28}{7} = 4$$

și apoi putem face proba scriind aceasta în termeni de multiplicare, ca fiind $28 = 7 \times 4$. Cum procedăm însă când avem de împărțit 0 la 7? Pentru a facilita găsirea unui răspuns, să denumim rezultatul a, astfel încât

$$\frac{0}{7} = a$$

Înmulțind pe diagonală, aceasta este echivalent cu $0 = 7 \times a$. Dacă așa stau lucrurile, singura valoare posibilă pentru a este 0, pentru că, dacă rezultatul înmulțirii

1100

Bhaskara folosește 0 ca simbol în algebră și încearcă să arate cum se lucrează cu acesta.

1202

Fibonacci folosește simbolul suplimentar 0 adăugat la sistemul indo-arab de numere 1, ..., 9 dar nu ca pe un număr echivalent cu acestea.

a două numere este 0, atunci unul din ele trebuie să fie 0. Cu siguranță nu este 7, așa că trebuie să fie un zero.

Aceasta nu este principala dificultate în ceea ce îl privește pe zero. Punctul critic este împărțirea la 0. Dacă încercăm să tratăm 7/0 la fel cum am procedat cu 0/7, am avea ecuația

$$\frac{7}{0} = b$$

Prin înmulțire pe diagonală, $0 \times b = 7$ și ajungem la nonsensul că $0 = 7$. Dacă admitem posibilitatea ca 7/0 să fie un număr, ajungem la o confuzie numerică pe scară mare. Ieșirea din această situație constă în a spune că 7/0 este nedefinit. Nu este posibil să extragem un sens din împărțirea lui 7 (sau a oricărui alt număr care nu este zero) la zero și, pur și simplu, nu permitem această operațiune. La fel cum nu este permis să plasăm o virgulă în mijlocul unui cuvânt, pentru că îl transformăm într-un nonsens.

Matematicianul indian din secolul al XII-lea Bhaskara, călcând pe urmele lui Brahmagupta, s-a aplecat asupra împărțirii la 0 și a sugerat că un număr împărțit la 0 dă ca rezultat infinit. O sugestie rezonabilă, pentru că, dacă împărțim un număr la un număr foarte mic, rezultatul este foarte mare. De exemplu, 7 împărțit la o zecime este 70, iar împărțit la o sutime dă rezultatul 700. Pe măsură ce numitorul devine din ce în ce mai mic, rezultatul devine din ce în ce mai mare. La minimul absolut, 0 însuși, răspunsul ar trebui să fie infinit. Acest raționament ne pune însă în situația de a explica un concept și mai bizar – și anume infinitul. Confruntarea cu infinitul nu este de folos; infinitul (cu notația lui standard ∞) nu se conformează regulilor uzuale ale aritmeticii și nu este un număr în sensul obișnuit al cuvântului.

Dacă 7/0 reprezintă o problemă, ce se poate face cu și mai bizarul 0/0? Dacă $0/0 = c$, prin înmulțire pe diagonală ajungem la ecuația $0 = 0 \times c$ și la faptul că $0 = 0$. Aceasta nu este cine știe ce descoperire, dar nici un nonsens nu este. De fapt, c ar putea fi orice număr și nu ajungem într-o situație imposibilă. Ajungem la concluzia că 0/0 poate fi egal cu orice; în cercurile matematicienilor este denumit politicos „nedeterminat".

După toate acestea, ajungem la concluzia că, atunci când este vorba despre împărțirea la zero, mai bine excludem operațiunea din modul în care facem calculele. Aritmetica se descurcă foarte bine și fără ea.

LA CE FOLOSEȘTE ZERO?

Pur și simplu nu ne-am putea descurca fără 0. Progresul științei a depins de el. Vorbim despre zero grade longitudine, zero grade pe scala temperaturilor, despre energie zero și gravitate zero. A intrat și în limbajul non-științific, cu expresii precum ora zero sau toleranță zero.

Ar putea fi folosit însă și mai mult. La New York, dacă pășiți de pe trotuarul 5th Avenue în Empire State Building, ajungeți în magnificul hol de intrare de la Etajul 1. Aceasta folosește capacitatea numerelor de a ordona, 1 pentru „primul", 2 pentru „al doilea" și tot așa până la 102. În Europa există și un Etaj 0, dar sunt rețineri în a-l numi astfel.

Matematica nu ar putea să funcționeze fără zero. Acesta se află în centrul conceptelor matematice care fac sistemul de numerație, algebra și geometria să funcționeze ca un tot. În șirul numerelor, 0 este numărul care separă numerele pozitive de cele negative și ocupă, așadar, o poziție privilegiată. În sistemul zecimal, zero servește ca substituent care ne permite să folosim atât numere uriașe, cât și unele microscopice.

De-a lungul câtorva sute de ani, zero a ajuns să fie acceptat și utilizat, devenind una dintre cele mai importante invenții ale omului. Matematicianul american din secolul al XIX-lea G.B. Halsted a adaptat un fragment din *Visul unei nopți de vară*, de Shakespeare, pentru a-l descrie ca motor al progresului care dă „iluzoriului nimic nu doar un loc anume și un nume, o imagine, un simbol, ci o putere utilă, caracteristică rasei hinduse din care s-a născut".

Când a fost introdus, 0 trebuie să fi părut ciudat, dar matematicienii au obiceiul de a se atașa de concepte stranii, care se dovedesc utile mult mai târziu. Echivalentul din zilele noastre îl găsim în teoria mulțimilor, unde conceptul de mulțime înseamnă o colecție de elemente. În această teorie, ∅ desemnează mulțimea fără nici un element, așa-numita „mulțime vidă". Această idee poate să ni se pară ciudată, dar, la fel ca 0, este indispensabilă.

Totul despre nimic

Suma dintre zero și un număr pozitiv este pozitivă

Suma dintre zero și un număr negativ este negativă

Suma dintre un număr pozitiv și unul negativ este diferența lor, sau, dacă numerele sunt egale, rezultatul este zero

Zero împărțit la un număr negativ sau pozitiv fie este zero, fie este exprimat ca fracție cu zero la numărător și cantitatea finită la numitor

Brahmagupta, 628 d.Hr.

Idee de bază
nimicul contează.

02 Sisteme de numerație

Un sistem de numerație este o metodă de a aborda conceptul de „cât de mulți". Diferite civilizații, în diferite perioade de timp, au adoptat metode diferite, mergând de la elementarul „unu, doi, trei, multe" până la extrem de sofisticata notație zecimală pozițională pe care o folosim astăzi.

Sumerienii și babilonienii, care locuiau în urmă cu 4 000 de ani pe teritoriul ocupat astăzi de Siria, Iordania și Irak, foloseau în practica lor de zi cu zi un sistem pozițional. Îl numim pozițional pentru că poți exprima „numărul" prin poziționarea unui simbol. De asemenea, ei foloseau 60 ca unitate de bază – ceea ce numim astăzi un sistem „de bază 60". Vestigiile bazei 60 ne urmăresc și acum: 60 de secunde într-un minut, 60 de minute într-o oră. Când măsurăm unghiuri, considerăm și acum că unghiul la centru corespunzător unui cerc are 360°, în pofida încercării sistemului metric de a-l face de 400° (astfel încât unghiul drept să aibă 100°).

Dacă strămoșii noștri din Antichitate aveau nevoie de numere pentru scopuri practice, există dovezi că aceste culturi primitive erau preocupate și de matematică în sine și că, pe lângă ocupațiile lor practice, își făceau timp să o studieze. Aceste explorări includeau ceea ce am putea numi „algebră", precum și proprietățile figurilor geometrice.

Sistemul egiptean din secolul al XIII-lea î.Hr. folosea baza 10 cu un sistem de semne hieroglifice. Remarcabil este că egiptenii au dezvoltat un sistem pentru a opera fracții, dar notația pozițională zecimală pe care o folosim astăzi vine de la babilonieni, rafinată mai târziu de hinduși. Avantajul este că ea poate fi folosită pentru a exprima și numere foarte mici, și numere foarte mari. Folosind doar numeralele indo-arabe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9, se pot face calcule cu o oarecare ușurință. Ne convingem de aceasta aruncând o privire la sistemul folosit de romani. Era adecvat necesităților lor, însă numai bunii cunoscători ai sistemului erau capabili să facă și calcule cu el.

CRONOLOGIE

30 000 î.Hr.
Populațiile paleolitice din Europa fac semne numerice pe oase

2000 î.Hr.
Babilonienii folosesc simboluri pentru numere

600 d.Hr.
Predecesorul sistemului nostru modern de notație zecimală este folosit în India

SISTEMUL ROMAN

Simbolurile de bază folosite de romani erau „zecile" (I, X, C și M) și „jumătățile" acestora (V, L și D). Aceste simboluri erau combinate ca să formeze altele. S-a sugerat că folosirea lui I, II, III și IIII derivă din imaginea degetelor noastre, V din forma mâinii, iar prin inversarea acesteia din urmă și unirea celor două ca să formăm X obținem două mâini, sau 10 degete. C vine de la *centum* și M de la *mille*, o sută, respectiv o mie în latină. Romanii foloseau, de asemenea, S pentru „o jumătate" și un sistem de fracții cu baza 12.

Sistemul de numerație roman

Imperiul Roman	adăugiri medievale
S o jumătate	
I unu	
V cinci	$\overline{V}$ cinci mii
X zece	$\overline{X}$ zece mii
L cincizeci	$\overline{L}$ cincizeci de mii
C o sută	$\overline{C}$ o sută de mii
D cinci sute	$\overline{D}$ cinci sute de mii
M o mie	$\overline{M}$ un milion

Sistemul roman folosea oarecum o metodă „înainte și după" pentru producerea simbolurilor de care era nevoie, dar se pare că nu a fost uniform adoptată. Romanii din Antichitate preferau să scrie IIII, forma IV fiind introdusă doar mai târziu. Combinația IX era folosită și ea, se pare, dar un roman care vedea scris SIX ar fi înțeles 8½! Vedeți mai sus numerele de bază ale sistemului roman, cu unele adăugiri din epoca medievală.

Folosirea numeralelor romane nu este deloc ușoară. De exemplu, înțelesul lui MMMCDXLIIII devine clar doar când se introduc mintal paranteze, iar atunci (MMM)(CD)(XL)(IIII) se citește ca 3000 + 400 + 40 + 4 = 3444. Dar încercați să adunați MMMCDXLIIII + CCCXCIIII. Un roman priceput în această artă ar cunoaște diferite scurtături și șmecherii, dar nouă ne este greu să obținem răspunsul corect fără să calculăm mai întâi în sistemul zecimal și să convertim rezultatul înapoi, în notația romană:

Adunarea

3444	→	MMMCDXLIIII
+ 394	→	CCCXCIIII
= 3838	→	MMMDCCCXXXVIII

Înmulțirea a două numere este mult mai dificilă și ar putea fi chiar imposibilă în cadrul sistemului de bază, până și pentru un roman! Ca să facem înmulțirea 3444 × 394 avem nevoie de adăugirile medievale.

1200

Se răspândește sistemul indo-arab de scriere a numerelor 1, ..., 9 și 0.

1600

Simbolurile sistemului zecimal iau formele moderne pe care le cunoaștem astăzi.

Înmulțirea

3444	→	MMMCDXLIIII
× 394	→	CCCXCIIII
= 1.356.936	→	$\overline{\text{MCCCLV}}$MCMXXXVI

Romanii nu aveau un simbol specific pentru zero. Dacă l-ai fi întrebat pe un cetățean vegetarian al Romei câte sticle de vin a băut în ziua respectivă, ar fi putut să scrie III, dar dacă îl întrebai câți pui a mâncat, nu ar fi putut să scrie 0. Vestigiile sistemului roman de numerație supraviețuiesc în paginația unor cărți (nu și a acesteia, totuși) și pe pietrele de fundație ale clădirilor. Unele combinații nu au fost folosite niciodată de romani, cum ar fi MCM pentru 1900, ci au fost introduse în vremurile moderne, din rațiuni stilistice. Romanii ar fi scris MDCCCC. Al paisprezecelea rege Ludovic al Franței, cunoscut lumii drept Ludovic al XIV-lea, prefera să fie știut ca Ludovic al XIIII-lea și a instituit regula ca toate ceasurile lui să arate ora 4 ca fiind IIII.

Un ceas Ludovic al XIIII-lea

NUMERELE ZECIMALE ÎNTREGI

În mod natural, noi identificăm „numerele" cu numerele zecimale. Sistemul zecimal este bazat pe zece, folosind cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9. De fapt, are la bază „zeci" și „unități", dar unitățile pot fi absorbite în „baza 10". Când scriem numărul 394, putem explica înțelesul lui zecimal spunând că este compus din 3 sute, 9 zeci și 4 unități și putem scrie

$$394 = 3 \times 100 + 9 \times 10 + 4 \times 1$$

Acesta poate fi scris și folosind „puterile" lui 10 (cunoscute și ca „exponenți" sau „indici"),

$$394 = 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

unde $10^2 = 10 \times 10$, $10^1 = 10$ și admitem separat că $10^0 = 1$. În această formă se vede mai clar baza zecimală a sistemului nostru uzual de numerație, un sistem care face adunarea și înmulțirea destul de transparente.

AVANTAJUL ZECIMALULUI

Până acum ne-am concentrat pe reprezentarea numerelor întregi. Poate sistemul zecimal să opereze și cu părți dintr-un număr, cum ar fi $^{572}/_{1000}$?
Aceasta înseamnă

$$\frac{572}{1000} = \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{2}{1000}$$

Putem trata „reciprocile" lui 10, 100, 1000 ca puteri negative ale lui 10, astfel încât

$$\frac{572}{1000} = 5 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$$

iar acesta poate fi scris ,572, unde virgula indică începutul puterilor negative ale lui 10. Dacă adunăm aceasta la exprimarea în sistem zecimal a lui 394, obținem $394^{572}/_{1000}$, adică, pur și simplu, 394 572.

Pentru numerele mari, notația zecimală poate fi foarte lungă, așa că revenim în astfel de situații la „notația științifică". De exemplu, 1 356 936 892 poate fi scris ca 1.356936892×10^9 ceea ce apare deseori ca „1.356936892 × 10E9" pe calculatoare sau computere. Aici puterea 9 este cu o unitate mai mică decât numărul de cifre ale numărului, iar litera E înseamnă „exponențial". Uneori am putea dori să folosim numere și mai mari, de exemplu atunci când vorbim despre numărul de atomi de hidrogen din universul cunoscut. Acest număr a fost estimat la 1.7×10^{77}. La fel, 1.7×10^{-77}, adică putere negativă, este un număr foarte mic, dar și el este ușor de folosit dacă recurgem la notația științifică. Nu am putea concepe să ne gândim la astfel de numere reprezentându-le cu simboluri romane.

Puterile lui 2	Zecimal
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1 024

ZEROURI ȘI CIFRE DE UNU

Dacă baza 10 este folosită, de obicei, în viața de zi cu zi, unele aplicații necesită o altă bază. Sistemul binar, care folosește baza 2, stă în spatele puterii computerelor moderne. Frumusețea binarului este că orice număr poate fi exprimat folosind doar simbolurile 0 și 1. Reversul medaliei pentru această economie este că expresiile numerice pot să fie foarte lungi.

Cum scriem 394 în notație binară? De data aceasta lucrăm cu puterile lui 2 și, după ce facem niște calcule, putem da expresia completă ca fiind

$$394 = 1 \times 256 + 1 \times 128 + 0 \times 64 + 0 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1$$

așadar, citind doar cifrele unu și zero, 394 în binar este 110001010.

Cum expresiile binare pot fi foarte lungi, în informatică apar frecvent și alte baze. Acestea sunt sistemul octal (baza 8) și hexazecimal (baza 16). În sistemul octal avem nevoie doar de simbolurile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, pe când sistemul hexazecimal folosește 16 simboluri. În sistemul de bază 16, folosim, de obicei, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Cum 10 corespunde literei A, numărul 394 este reprezentat în hexazecimal ca 18A. Este la fel de simplu ca ABC, dar nu uitați că asta înseamnă 2748 în zecimal!

Idee de bază

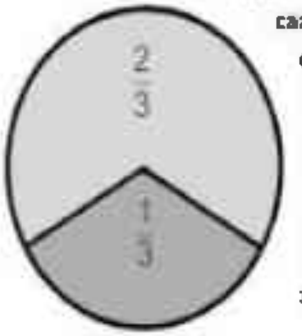
să punem numerele pe hârtie.

03 Fracții

O fracție este un „număr fracturat"- la propriu. Dacă rupem un număr întreg în bucăți, într-un mod adecvat, înseamnă că folosim fracții. Să luăm exemplul tradițional, tortul, și să-l tăiem în trei părți.

ersoana care primește două dintre cele trei părți ale tortului capătă o fracție echivalentă cu $^{2}/_{3}$. Ghinionistul capătă doar $^{1}/_{3}$. Dacă punem laolaltă cele două bucăți de tort, obținem ortul din nou întreg sau în fracții, $^{1}/_{3} + ^{2}/_{3} = 1$, unde 1 reprezintă prăjitura întreagă.

ată un alt exemplu. Ați fost probabil prin magazine în perioadele de reduceri și ați văzut o cămașă scoasă la vânzare la patru cincimi din prețul original. În acest caz, fracția este $^{4}/_{5}$. Am putea spune și că prețul cămășii este redus cu o cincime din cel original. Aceasta se scrie $^{1}/_{5}$ și vedem $^{1}/_{5} + ^{4}/_{5} = 1$, unde 1 reprezintă prețul original.



O fracție are întotdeauna forma unui număr întreg „pe" un număr întreg. Numărul de sub linie poartă denumirea de „numitor", pentru că ne spune câte părți formează întregul. Numărul de sus este „numărătorul", pentru că ne spune câte unități fracționare avem. Așadar, o fracție în notația consacrată arată întotdeauna astfel:

$$\frac{\text{numărător}}{\text{numitor}}$$

n cazul prăjiturii, fracția pe care ai vrea să o mănânci este $^{2}/_{3}$, unde numitorul este 3, ar numărătorul 2. $^{2}/_{3}$ este format din 2 unități fracționare de $^{1}/_{3}$.

utem avea și fracții cum este $^{14}/_{5}$ (numite impropriu fracții), unde numărătorul este mai mare decât numitorul. Dacă împărțim 14 la 5, obținem 2 și rest 4, care poate fi scris a numărul „mixt" $2^{4}/_{5}$. Aceasta înseamnă numărul întreg 2 și fracția „propriu-zisă" $^{4}/_{5}$. Cei din vechime ar fi scris $^{4}/_{5}$2. Fracțiile sunt reprezentate, de obicei, într-o formă în are numărătorul și numitorul (numărul „de sus" și cel „de jos") nu au divizori comuni. e exemplu, numărătorul și numitorul lui $^{8}/_{10}$ au divizorul comun 2, pentru că $8 = 2 \times 4$ i $10 = 2 \times 5$. Dacă scriem fracția $^{8}/_{10} = ^{2\times4}/_{2\times5}$, putem „simplifica" 2-urile și astfel

CRONOLOGIE

1800 î.Hr.	1650 î.Hr.	100 d.Hr.
Fracțiile sunt folosite în culturile babiloniene	Egiptenii folosesc unitățile de fracție	Chinezii concep un sistem pentru calcule cu fracții

$^{8}/_{10}$ = $^{4}/_{5}$, o formă mai simplă cu aceeași valoare. Matematicienii definesc fracțiile ordinare ca fiind raportul a două numere raționale. Numerele raționale erau numerele pe care grecii din Antichitate le puteau „măsura".

ADUNAREA ȘI ÎNMULȚIREA

Caracteristica destul de ciudată a fracțiilor este că ele sunt mai ușor de înmulțit decât de adunat. Înmulțirea numerelor întregi dă atâtea bătăi de cap, încât a fost nevoie de inventarea unor modalități ingenioase pentru a face asta. În cazul fracțiilor, însă, adunarea este mai dificilă și necesită o oarecare atenție.

Să începem cu înmulțirea fracțiilor. Când cumperi o cămașă la patru cincimi din prețul original de 30£, plătești prețul redus de 24£. Cele 30£ se împart în cinci părți de câte 6£ fiecare, iar patru dintre aceste cinci părți înseamnă 4 × 6 = 24, preț pe care îl plătești pentru cămașă.

Ulterior, descoperind că respectivele cămăși nu se vând prea bine, managerul magazinului decide să scadă mai mult prețul și anunță că le vinde la $^{1}/_{2}$ din prețul deja redus. Dacă intri în magazin acum, poți să cumperi cămașa cu 12£. Aceasta înseamnă $^{1}/_{2}$ × $^{4}/_{5}$ × 30, care este egal cu 12. Ca să înmulțești două fracții, trebuie doar să înmulțești numitorii între ei și numărătorii între ei:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{1 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{10}$$

Dacă managerul ar fi făcut cele două reduceri deodată, ar fi trebuit să anunțe că vinde cămășile la patru zecimi din prețul original de 30£. Aceasta înseamnă $^{4}/_{10}$ × 30, adică 12£.

Adunarea a două fracții este cu totul altceva. Să adunăm $^{1}/_{3}$ + $^{2}/_{3}$ este ușor, pentru că numitorii sunt la fel. Adunăm, pur și simplu, cei doi numărători și obținem $^{3}/_{3}$, sau 1. Dar cum putem să adunăm două treimi din tort cu patru cincimi din tort? Cum putem să ne dăm seama cât face $^{2}/_{3}$ + $^{4}/_{5}$? Ar fi simplu dacă am putea spune că $^{2}/_{3}$ + $^{4}/_{5}$ = $^{2+4}/_{3+5}$ = $^{6}/_{8}$. Însă, din păcate, nu putem.

Pentru adunarea fracțiilor este nevoie de o abordare diferită. Ca să adunăm $^{2}/_{3}$ cu $^{4}/_{5}$ trebuie mai întâi să le exprimăm sub forma unor fracții care au numitor comun. Mai întâi înmulțim partea de sus și cea de jos din $^{2}/_{3}$ cu 5 ca să obținem $^{10}/_{15}$. Acum să multiplicăm partea de sus și cea de jos din $^{4}/_{5}$ cu 3 ca să obținem $^{12}/_{15}$. Acum ambele

1202

Leonardo din Pisa (Fibonacci) popularizează notația cu bară a fracțiilor.

1585

Simon Stevin pune la punct o teorie a fracțiilor zecimale.

1700

Linia fracției (–) intră în uzul general (ca în $^{4}/_{5}$).

fracții au 15 ca numitor comun și ca să le adunăm trebuie doar să adunăm numărătorii:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$$

CONVERTIREA LA ZECIMALE

În lumea științei și în cele mai multe aplicații ale matematicii, zecimalele sunt modalitatea preferată de exprimare a fracțiilor. Fracția $^4/_5$ este același lucru cu fracția $^8/_{10}$, care are numitorul 10 și pe care o putem scrie sub formă zecimală ca 0,8.

Fracțiile care au numitorul 5 sau 10 sunt ușor de transformat. Dar cum poate fi transformat $^7/_8$, de exemplu, în formă zecimală? Tot ceea ce trebuie să știm este că, atunci când împărțim un număr întreg la un altul, fie se împarte exact, fie rămâne o anume cantitate pe care o numim „rest".

Rămânând la exemplul nostru cu $^7/_8$, transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale se face astfel:

- Încercați să împărțiți 7 la 8. Nu merge sau ați putea spune că merge de 0 ori cu rest 7. Consemnăm aceasta scriind 0 urmat de virgula ce precede zecimalele: „0,".
- Acum împărțim la 8 numărul 70 (restul din etapa precedentă, multiplicat cu 10). Merge de 8 ori, pentru că 8 × 8 = 64, așadar răspunsul este 8, cu restul 6 (70-64). Așa că scriem și asta în completarea rezultatului de la primul pas, obținând „0,8".
- Acum împărțim la 8 numărul 60 (restul din etapa precedentă, multiplicat cu 10). Pentru că 7 × 8 = 56, răspunsul este 7 cu restul 4. Consemnăm și aceasta și avem până acum „0,87".
- Împărțim la 8 numărul 40 (restul din etapa precedentă multiplicat cu 10). Răspunsul este exact 5, cu rest zero. Când obținem restul 0, procedura s-a terminat. Gata. Răspunsul final este „0,875".

Dacă aplicăm această rețetă de transformare la alte fracții, este posibil să nu putem termina niciodată! O putem ține așa la nesfârșit: dacă încercăm să transformăm $^2/_3$ în formă zecimală, descoperim că în fiecare etapă avem de împărțit 20 la 3 și obținem rezultatul 6, cu rest 2. Așa că iarăși avem de împărțit 6 la 20 și nu ajungem niciodată în acel punct în care restul este 0. În acest caz, avem numărul periodic simplu 0,666666... Acesta se scrie 0,(6), pentru a indica zecimala care se repetă.

Există multe fracții care ne pot duce la nesfârșit în astfel de calcule. Un caz interesant este fracția $^5/_7$. În acest caz, avem $^5/_7$ = 0,714285714285714285... și vedem că secvența 714285 este cea care se repetă. Dacă o fracție ne conduce la

o astfel de secvență care se tot repetă și nu putem să o scriem niciodată în formă zecimală finită, intră în funcțiune notația cu „perioadă". În cazul lui $^5/_7$, scriem $^5/_7$ = 0,714285

FRACȚIILE EGIPTENE

Egiptenii din mileniul al II-lea î.Hr. își bazau sistemul de fracții pe hieroglife care desemnau unitățile fracționare – adică fracțiile cu numărător 1. Știm asta din Papirusul Rhind, care este păstrat la British Museum. Era un sistem de fracții atât de complicat încât numai cei instruiți în folosirea lui îi puteau cunoaște secretele și puteau face calcule corecte.

Egiptenii foloseau câteva fracții privilegiate, cum ar fi $^2/_3$, dar toate celelalte fracții erau exprimate în termeni de unități fracționare ca $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_{11}$ sau $^1/_{168}$. Acestea erau pentru ei fracțiile „fundamentale", cu ajutorul cărora se puteau exprima toate celelalte fracții. De exemplu, $^5/_7$ nu este o unitate fracționară, dar poate fi exprimată cu ajutorul unităților fracționare

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{168}$$

unde sunt folosite *diferite* unități fracționare. O caracteristică a sistemului este că ar putea exista mai multe moduri de a scrie o fracție, iar unele variante sunt mai scurte decât altele. De exemplu,

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$$

Poate că „descompunerea egipteană" nu are prea mare utilitate practică, dar sistemul a inspirat generații de cercetători ai matematicii pure și a oferit numeroase provocări, dintre care unele sunt nerezolvate și astăzi. De exemplu, nu s-a găsit încă un matematician îndrăzneț care să pună la punct un algoritm pentru găsirea celei mai scurte descompuneri în fracții egiptene.

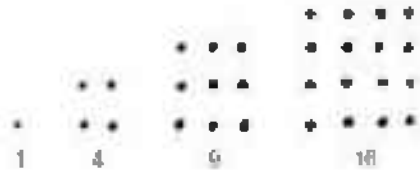
Fracții egiptene

Idee de bază
un număr supra alt număr

04 Pătrate și rădăcini pătrate

Dacă vă place să desenați pătrate din punctulețe, modelele dumneavoastră de gândire sunt similare celor ale pitagoreicilor. Această activitate era foarte prețuită în comunitatea adepților lui Pitagora, un matematician cunoscut mai ales pentru teorema care îi poartă numele. Pitagora s-a născut pe insula grecească Samos, iar societatea lui religioasă secretă a înflorit în sudul Italiei. Pitagoreicii considerau că matematica este cheia naturii universului.

Dacă numărăm punctele, observăm că primul „pătrat" din stânga este format dintr-un singur punct. Pentru pitagoreici, 1 era cel mai important număr, îmbibat de viață spirituală. Începem bine, așadar. Continuând să numărăm punctele ce formează pătratele următoare, obținem numerele „pătrate" 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... Acestea se numesc pătrate „perfecte". Poți calcula un număr pătrat adunând punctele de pe forma ⌝ exterioară precedentului, de exemplu 9+7=16. Pitagoreicii nu s-au oprit la pătrate. Ei au studiat și alte forme, cum ar fi triunghiurile, pentagoanele (figura cu cinci laturi) și alte forme poligonale (cu mai multe laturi).



Numerele triunghiulare seamănă cu o grămadă de pietre. Dacă numărăm aceste puncte, obținem 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... Dacă vrei să calculezi un număr triunghiular, îl poți folosi pe precedentul, la care aduni numărul de puncte de pe ultimul rând. De exemplu, care este numărul triunghiular care vine după 10? Acesta va avea 5 puncte pe ultimul rând, așa că adunăm 10 + 5 = 15.

Dacă veți compara numerele pătrate și cele triunghiulare, veți observa că numărul 36

CRONOLOGIE

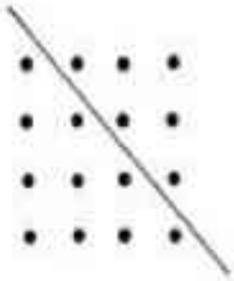
1750 î.Hr.	525 î.Hr.	cca 300 î.Hr.
Babilonienii alcătuiesc tabele de rădăcini pătrate	Pitagoreicii studiază numerele pătrate aranjate geometric.	Teoria numerelor iraționale a lui Eudoxus este publicată în Cartea 5 a *Elementelor* lui Euclid

apare în ambele liste. Dar există o legătură și mai uimitoare. Dacă luați numere triunghiulare succesive și le adunați două câte două, ce obțineți? Să încercăm și să punem rezultatele într-un tabel.

Așa este! Dacă aduni două numere triunghiulare succesive, obții un număr pătrat. Există o dovadă și mai vizibilă, la propriu. Să luăm un pătrat format din 4 șiruri de câte 4 puncte și să trasăm prin el o diagonală. Punctele de deasupra liniei formează un număr triunghiular, iar sub linie se află următorul număr triunghiular. Această observație este valabilă pentru pătrate de orice mărime. De la aceste „diagrame în puncte" până la măsurarea suprafețelor este un pas foarte mic. Suprafața unui pătrat de latură 4 este $4 \times 4 = 4^2 = 16$ unități de suprafață. În general, dacă notăm latura cu x, atunci suprafața va fi x^2.

Adunarea a două numere triunghiulare succesive

1 + 3	4
3 + 6	9
6 + 10	16
10 + 15	25
15 + 21	36
21 + 28	49
28 + 36	64

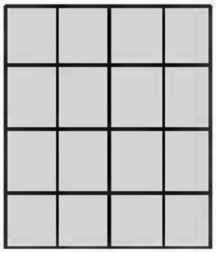


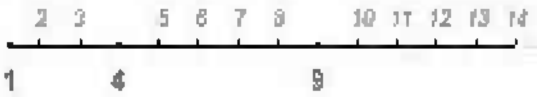
Pătratul x^2 stă la baza formei parabolice. Aceasta este forma pe care o găsiți la antenele de satelit sau la oglinzile reflectorizante de la farurile mașinilor. Parabola are un focar. La antena de satelit, un senzor plasat în focar captează semnalul reflectat atunci când razele paralele venite din spațiu lovesc suprafața curbată și sunt direcționate spre punctul de focalizare.

La farul de mașină, becul amplasat în focar trimite un fascicul paralel de lumină. În sport, aruncătorii de greutăți, de suliță sau de ciocan vor recunoaște cu toții în parabolă forma traiectoriei curbate pe care toate obiectele o urmează în căderea lor către pământ.

RĂDĂCINI PĂTRATE

Dacă inversăm problema și vrem să aflăm lungimea laturii unui pătrat care are suprafața dată 16, răspunsul este evident 4. Rădăcina pătrată a lui 16 este 4 și se scrie $\sqrt{16} = 4$. Simbolul √ pentru rădăcinile pătrate se folosește din secolul al XVI-lea. Toate numerele pătrate au, ca rădăcini pătrate, numere întregi. De exemplu, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$ ș.a.m.d. Sunt totuși multe goluri în șirul numerelor naturale, între aceste pătrate perfecte. Vorbim despre 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11...





Există o notație alternativă foarte sugestivă pentru rădăcinile pătrate. Dacă x2 indică un număr pătrat, putem scrie rădăcina pătrată a acestui număr sub

630 d.Hr.
Brahmagupta oferă metode pentru calculul rădăcinilor pătrate

1550
Este introdus simbolul √ pentru rădăcinile pătrate

1872
Richard Dedekind pune la punct o teorie a numerelor iraționale.

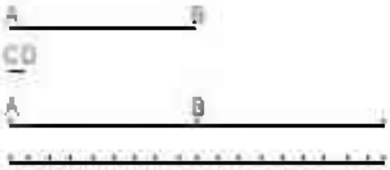
forma $x^{1/2}$, foarte utilă în schema de înmulțire a numerelor prin adunarea puterilor. Aceasta stă la baza logaritmilor, inventați după ce am aflat, în jurul anului 1600, că o problemă de înmulțire poate fi transformată într-una de adunare. Dar aceasta este o altă poveste. Aceste numere au toate rădăcini pătrate, însă nu sunt numere întregi. Practic, orice calculator are un buton $\sqrt{\ }$ pe care, dacă îl apăsăm, aflăm de exemplu că $\sqrt{7} = 2,645751311$.

Să luăm cazul lui $\sqrt{2}$. Numărul 2 avea o semnificație specială pentru pitagoreici, pentru că este primul număr par (grecii din Antichitate considerau că numerele pare sunt feminine și cele impare masculine, iar numerele mici aveau personalități distincte). Dacă faceți pe calculator operația $\sqrt{2}$, obțineți rezultatul 1,414213562, presupunând că aveți un calculator cu atâtea zecimale. Aceasta să fie rădăcina pătrată a lui 2? Ca să verificăm, facem calculul $1,414213562 \times 1,414213562$. Obținem rezultatul 1,999999999, care nu este chiar 2, pentru că 1,414213562 este doar o aproximare a rădăcinii pătrate a lui 2.

Remarcabil este că tot ceea ce vom obține vreodată este doar o aproximare. Chiar dacă extindem calculul lui $\sqrt{2}$ la milioane de zecimale, rezultatul va rămâne tot o aproximare pentru rădăcina pătrată a lui 2. Numărul $\sqrt{2}$ este important în matematică și, chiar dacă nu este atât de celebru ca π sau e (vezi pp. 20–27), este suficient de important ca să primească propriul nume – uneori i se spune „numărul pitagoreic".

RĂDĂCINILE PĂTRATE SUNT FRACȚII?

Întrebarea dacă rădăcinile pătrate sunt fracții are legătură cu teoria măsurării, așa cum era ea cunoscută grecilor din Antichitate. Să presupunem că avem o linie AB a cărei lungime vrem să o măsurăm și o „unitate" indivizibilă CD, cu care să măsurăm. Ca să facem măsurătoarea, plasăm secvențial unitatea CD pe linia AB. Dacă plasăm unitatea de m ori, iar sfârșitul ultimei unități coincide perfect cu sfârșitul liniei AB (în punctul B), atunci lungimea liniei AB este, pur și simplu, m. Dacă nu, atunci putem plasa o copie a liniei AB în prelungirea ei și să continuăm să măsurăm cu unitatea (vezi figura). Grecii credeau că, la un moment dat, folosind n copii ale lui AB și m unități, sfârșitul unității se va potrivi perfect cu sfârșitul liniei AB cu numărul m. Lungimea lui AB ar fi atunci m/n. De exemplu, dacă sunt așezate una după alta 3 copii ale lui AB și încap de-a lungul lor 29 de unități, atunci lungimea lui AB va fi $29/3$.



Grecii au cercetat și cum să măsoare lungimea laturii AB (ipotenuza) a unui triunghi dreptunghic la care amândouă celelalte două laturi au o „unitate" lungime. Potrivit teoremei lui Pitagora, lungimea lui AB poate fi scrisă simbolic ca $\sqrt{2}$, așa că întrebarea este dacă $\sqrt{2} = m/n$.

Calculatorul nostru ne-a arătat deja că șirul zecimalelor cu care îl exprimăm pe $\sqrt{2}$ este potențial infinit, iar acest fapt (că șirul zecimalelor este fără sfârșit) arată poate că $\sqrt{2}$ nu este o fracție. Dar fără sfârșit este și șirul zecimalelor din 0,33333..., care reprezintă fracția $^1/_3$. Avem nevoie de argumente mai convingătoare.

ESTE √2 O FRACȚIE?

Aceasta ne duce la una dintre cele mai celebre demonstrații din matematică. Ea urmează linia tipului de demonstrație pe care îl iubeau grecii: metoda *reductio ad absurdum*. În primul rând, se presupune că $\sqrt{2}$ nu poate fi, în același timp, și o fracție, și o „non-fracție". Aceasta este o lege a logicii, numită „excluderea căii de mijloc". În această situație nu există cale de mijloc, iar grecii au făcut ceva ingenios. Au presupus că este o fracție și, aplicând o logică strictă la fiecare pas, au ajuns la o contradicție, o „absurditate". Să facem și noi acest lucru. Să presupunem că

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

Putem merge cu presupunerile puțin mai departe. Putem presupune că *m* și *n* nu au divizori comuni. Și asta deoarece, dacă ar fi avut divizori comuni, aceștia puteau fi simplificați înainte să începem (de exemplu, fracția $^{21}/_{35}$ este echivalentă cu $^3/_5$ din care a dispărut divizorul comun 7).

Putem ridica la pătrat ambele părți din $\sqrt{2} = {}^m/_n$, să obținem $2 = {}^{m^2}/_{n^2}$, așadar $m^2 = 2n^2$. Aici putem face o primă observație: cum m^2 este 2 înmulțit cu ceva, el trebuie să fie un număr par. Rezultă că nici *m* nu poate fi impar (pentru că pătratul unui număr impar este impar) și deci *m* este și el un număr par.

Până aici, logica este impecabilă. Cum *m* este un număr par, el trebuie să fie 2 înmulțit cu ceva, deci putem scrie $m = 2k$. Ridicând la puterea a doua ambele părți, obținem $m^2 = 4k^2$. Combinând aceasta cu faptul că $m^2 = 2n^2$, înseamnă că $2n^2 = 4k^2$ și, dacă îl simplificăm pe 2, ajungem la concluzia că $n^2 = 2k^2$. Dar deja am mai văzut asta! Și, la fel ca mai înainte, ajungem la concluzia că n^2 este par și *n* însuși este par. Am dedus astfel, doar pe cale logică, faptul că *m* și *n* sunt amândouă pare și au 2 ca divizor comun. Aceasta contrazice presupunerea noastră că *m* și *n* nu au divizori comuni. Concluzia este, așadar, că nu poate fi o fracție.

Se poate dovedi și că toate numerele din secvența $\sqrt{n}$ (cu excepția cazurilor în care *n* este un pătrat perfect) nu pot fi fracții. Numerele care nu pot fi exprimate ca fracții se numesc „iraționale", așadar observăm că există un număr infinit de numere iraționale.

Idee de bază
drumul spre numerele iraționale

05 π

π este cel mai vestit număr din matematică. Uitați de toate celelalte constante ale naturii, căci π se va afla întotdeauna în capul listei. Dacă ar exista premii Oscar pentru numere, π ar câștiga câte unul în fiecare an.

π, sau pi, este lungimea exterioară a unui cerc (circumferința) împărțită la lungimea liniei drepte care trece prin centru (diametru). Valoarea lui, raportul dintre aceste două lungimi, nu depinde de dimensiunea cercului. Indiferent cum este cercul, mare sau mic, π este, într-adevăr, o constantă matematică. Habitatul natural al lui π este cercul, însă el apare practic oriunde în matematică, inclusiv în domenii care nu au nici cea mai mică legătură cu cercul.

ARHIMEDE DIN SIRACUZA

Pentru un cerc de diametru d și rază r:

circumferința $= \pi d = 2\pi r$

aria $= \pi r^2$

Pentru o sferă de diametru d și rază r:

aria suprafeței $= \pi d^2 = 4\pi r^2$

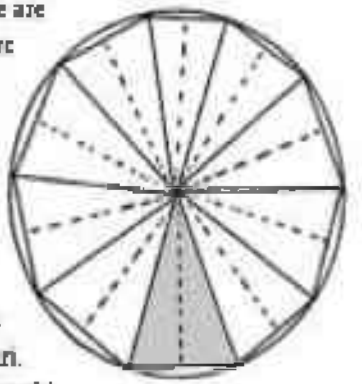
volumul $= \frac{4\pi r^3}{3}$

Raportul dintre circumferință și diametrul unui cerc era subiect de mare interes în Antichitate. În jurul anului 2000 î.Hr., babilonienii au făcut observația că, la orice cerc, circumferința are o lungime de aproximativ trei ori mai mare decât diametrul.

Arhimede din Siracuza este cel care a început cu adevărat teoria matematică a lui π, în jurul anului 250 î.Hr. Matematicienii, care adoră să facă clasamente ale colegilor de breaslă, îl plasează pe Arhimede pe același nivel cu Carl Friedrich Gauss („prințul matematicienilor") și sir Isaac Newton. Dincolo de valoarea acestei judecăți, este clar că Arhimede ar face parte din orice Panteon al matematicii. El a fost însă departe de figura savantului izolat în turnul lui de fildeș – pe lângă contribuțiile aduse astronomiei, matematicii și fizicii, el a proiectat arme, cum ar fi catapulte, pârghii și „oglinzi incendiare", toate folosite pentru a-i ține la respect pe romani. Dar cu siguranță avea ceva și dintr-un profesor distrat, pentru că altfel nu ar fi sărit din baie ca să alerge gol pe stradă, strigând „Evrika" când a descoperit legea flotabilității în hidrostatică. Istoria nu menționează cum și-a sărbătorit descoperirile referitoare la π.

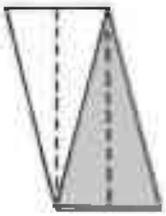
CRONOLOGIE

2000 î.Hr.	250 î.Hr.	1706 d.Hr.
Babilonienii observă că π este aproximativ 3.	Arhimede dă o aproximare bună a lui π ca fiind 22/7.	William Jones introduce simbolul π.



Cum π este definit ca raportul dintre circumferința cercului și diametru, ce are de-a face aceasta cu aria cercului? Este o deducție faptul că aria unui cerc de rază r este πr^2, deși acest lucru este mai bine cunoscut ca fiind definiția circumferință/diametru a lui π. Faptul că π face un dublu serviciu, și pentru arie, și pentru circumferință, este demn de reținut.

Cum se poate demonstra acest lucru? Cercul poate fi împărțit într-un număr de triunghiuri egale, înguste, cu lungimea bazei b și a căror înălțime este aproximativ egală cu raza r. Acestea formează în interiorul cercului un poligon, care aproximează aria cercului. Să trasăm pentru început 1 000 de triunghiuri. Întregul proces este un exercițiu de aproximări. Putem lipi fiecare pereche de triunghiuri adiacente ca să formăm un dreptunghi (aproximativ) cu aria $b \times r$, astfel încât aria totală a poligonului va fi $500 \times b \times r$. Cum $500 \times b$ este aproximativ jumătate din circumferința exprimată prin formula πr, aria poligonului este $\pi r \times r = \pi r^2$. Cu cât trasăm mai multe triunghiuri, cu atât mai bună va fi aproximația noastră și, în cele din urmă, tragem concluzia că aria cercului este πr^2.



Arhimede a estimat valoarea lui π ca fiind undeva între 223/71 și 220/70. Așadar, tot lui Arhimede îi datorăm cunoscuta aproximație 22/7 pentru valoarea lui π. Onoarea introducerii simbolului actual π îi revine mai puțin cunoscutului William Jones, un matematician galez care în secolul al XVIII-lea a devenit vicepreședinte al Societății Regale din Londra. Matematicianul și fizicianul Leonhard Euler a fost cel care a popularizat π legat de raportul cercului (circumferință/diametru).

VALOAREA EXACTĂ A LUI π

Nu vom putea ști niciodată valoarea exactă a lui π, deoarece este un număr irațional, fapt dovedit de Johann Lambert în 1768. Expansiunea zecimală este infinită, fără vreun model predictibil. Primele 20 de zecimale sunt 3,14159265358979323846... Valoarea lui folosită de matematicienii chinezi este 3,16227766016837933199 și a fost adoptată în jurul anului 500 î.Hr. de Brahmagupta. Această valoare este de fapt puțin mai bună decât aproximarea brută 3 și diferă de π începând de la a doua zecimală.

π poate fi calculat și din serii de numere. Una bine cunoscută este

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

dar această serie converge foarte lent spre π, iar calculul este aproape fără speranță.

1761

Lambert demonstrează că π este irațional.

1882

Lindemann demonstrează că π este transcendent.

Euler a descoperit o serie remarcabilă care converge spre π :

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$$

Geniul autodidact Srinivasa Ramanujan a conceput câteva formule spectaculoase de aproximare a lui π. Una dintre ele, care implică numai rădăcina pătrată a lui 2, este:

$$\frac{9801}{4412}\sqrt{2} = 3{,}14159273001330566031399618 90 \ldots$$

Matematicienii sunt fascinați de π. În timp ce Lambert a dovedit că π nu poate fi o fracție, în 1882, matematicianul german Ferdinand von Lindemann a rezolvat cea mai importantă problemă asociată cu π. El a arătat că π este „transcendent" – aceasta înseamnă că π nu poate fi soluția unei ecuații algebrice (o ecuație care implică doar puteri ale lui x). Prin rezolvarea acestei „ghicitori a secolelor", Lindeman a ajuns la problema „cuadraturii cercului". Se dă un cerc, iar provocarea este să construiești un pătrat care să aibă aceeași arie, folosind doar compasul și rigla. Lindemann a demonstrat concludent că nu se poate. Astăzi expresia „cuadratura cercului" este echivalentă cu o imposibilitate.

Calculul real al lui π a continuat în ritm alert. În 1853, William Shanks a pretins că a calculat corect până la 607 zecimale (de fapt corecte erau doar 527). În epoca modernă, demersurile pentru calcularea a cât mai multe zecimale ale lui π au luat avânt datorită computerelor. În 1949, π a fost calculat cu 2 037 de zecimale, ceea ce a durat 70 de ore pe un computer ENIAC. Până în 2002, π a fost calculat până la uluitorul șir de 1 241 100 000 000 de zecimale, iar șirul continuă să crească. Dacă ne-am așeza pe Ecuator, calculul lui Shanks s-ar întinde pe 14 metri, dar șirul din 2002 ar fi suficient de lung ca să înconjoare Pământul de 62 de ori!

Despre π s-au pus diferite întrebări, iar unele și-au găsit răspunsul. Cifrele care formează numărul π sunt aleatorii? Este posibil să găsim o secvență predeterminată în șirul zecimalelor? De exemplu, este posibil să găsim secvența 0123456789? În anii 1950, această întrebare părea fără răspuns. Nimeni nu a găsit o astfel de secvență în cele 2 000 de zecimale cunoscute ale lui π. L.E.J. Brouwer, un matematician olandez, a spus că problema în sine este lipsită de sens, deoarece, după părerea lui, nu putea fi rezolvată experimental. De fapt, aceste cifre au fost găsite în 1997 la poziția 17 387 594 880 sau, folosind metafora Ecuatorului, cu aproximativ 4 900 km înainte de ocolul complet al Pământului. Veți găsi zece cifre de 6 la rând înainte să parcurgeți 900 km, dar va trebui să faceți un ocol complet al Pământului și să mai mergeți 5 000 km înainte să găsiți zece cifre de 7 la rând.

π în poezie

Dacă vreți, într-adevăr, să țineți minte primele zecimale ale lui π, puțină poezie poate fi de ajutor. Urmând tradiția predării matematicii prin „metoda mnemonică", în engleză există o variantă strălucită a poeziei lui Edgar Allan Poe, „The Raven" („Corbul"), creată de Michael Keith.

Începutul poeziei lui Poe

The Raven – E.A. Poe

Once upon a midnight dreary, while I pondered weak and weary,

Over many a quaint and curious volume of forgotten lore,

Varianta lui Keith pentru începutul lui π

Poe, E. – Near A Raven

Midnights so dreary, tired and weary.

Silently pondering volumes extolling all by now obsolete lore.

Numărând literele fiecărui cuvânt din versiunea lui Keith, se pot obține primele 740 de zecimale ale lui π.

IMPORTANȚA LUI π

Ce rost are să știm atâtea zecimale ale lui π? La urma urmei, pentru cele mai multe calcule este nevoie doar de câteva zecimale; probabil că zece zecimale sunt suficiente pentru orice aplicație practică, iar aproximarea lui Arhimede, de 22/7, este bună pentru majoritatea dintre noi. Dar calculele extinse nu se fac doar pentru distracție. Ele sunt folosite pentru a testa limitele computerelor, pe lângă fascinația pe care o exercită asupra unui grup de matematicieni care și-au spus „prietenii lui pi".

Episodul cel mai ciudat din istoria lui π ar putea fi tentativa din legislativul statului american Indiana de a adopta o lege prin care să i se fixeze valoarea. S-a întâmplat la sfârșitul secolului al XIX-lea, când doctorul în medicină E.J. Goodwin a introdus un proiect de lege menit să îl facă pe π „digerabil". O problemă de care s-au lovit dezbaterile a fost incapacitatea celui care a propus legea de a fixa valoarea dorită. Din fericire pentru Indiana, aleșii au înțeles nebunia fixării prin lege a lui π înainte să se ajungă la ratificarea documentului. Ulterior, politicienii l-au lăsat pe π în pace.

Idee de bază
π, o poveste fără sfârșit

06 e

***e* este copilul minune al matematicii, când este comparat cu singurul lui rival, π. Dacă π este mai maiestuos și are un trecut impresionant, care merge până la babilonieni, *e* nu este atât de încărcat de semnificații istorice. Constanta *e* este tânără, vibrantă și este prezentă peste tot unde apare ideea de creștere. Fie că este vorba de populație, de bani sau de alte cantități fizice, creșterea implică invariabil constanta *e*.**

e este numărul cu valoarea aproximativă 2,71828. De ce este, însă, atât de special? Nu este un număr ales la întâmplare, avem de-a face cu una dintre cele mai importante constante matematice. Istoria ei începe în prima parte a secolului al XVII-lea, când mai mulți matematicieni și-au pus energiile în slujba clarificării ideii de logaritm, invenția strălucită care a permis ca înmulțirea numerelor mari să fie convertită într-o adunare.

Dar povestea începe, de fapt, cu o problemă legată de comerțul secolului al XVII-lea. Jacob Bernoulli făcea parte din ilustra familie elvețiană Bernoulli, o familie care a dat lumii o adevărată dinastie de matematicieni. În 1683, Jacob a început să lucreze la problema dobânzii compuse.

BANI, BANI, BANI...

Să presupunem că avem o perioadă de 1 an, o dobândă uluitoare de 100% și un depozit inițial (numit „principalul") de 1£. Desigur, rareori primim o dobândă de 100% pentru banii noștri, dar această valoare este potrivită scopului nostru, iar conceptul poate fi adaptat unor dobânzi mai realiste, precum 6% sau 7%. La fel, dacă avem sume principale mai mari, cum ar fi 10 000£, putem multiplica tot ce facem cu 10 000.

La sfârșitul unui an cu 100% dobândă, vom avea „principalul" plus suma corespunzătoare dobânzii, care în acest caz este tot 1£. Așadar, în total vom avea suma uluitoare de 2£. Acum să presupunem că dobânda se înjumătățește la 50%, dar se aplică separat pentru fiecare jumătate de an. În prima jumătate de an câștigăm din dobândă 50 de penny, iar principalul nostru crește la 1,50£ până la sfârșitul acestei prime jumătăți de an. Astfel, până la sfârșitul anului am avea această sumă, plus 75 de penny reprezentând

CRONOLOGIE

1618 d.Hr.

John Napier găsește constanta *e* în legătură cu logaritmii.

1727

Euler folosește notația *e* în legătură cu teoria logaritmilor; constanta este numită uneori numărul lui Euler.

dobânda la această sumă. Lira noastră a crescut așadar la 2,25£ până la sfârșitul anului. Prin aplicarea dobânzii compuse pentru fiecare jumătate de an avem un câștig suplimentar de 25 de penny. Suma poate părea infimă, dar dacă am avea 10 000£ de investit, câștigul ar fi de 2 250£, în loc de 2 000£. Compunerea dobânzilor pe jumătate de an ne aduce un câștig suplimentar de 250£.

Dacă, însă, compunerea dobânzilor la fiecare jumătate de an ne aduce un câștig pentru economiile noastre, banca va câștiga și ea din orice bani pe care îi deținem – așa că trebuie să fim atenți. Să presupunem acum că anul este împărțit în patru și că la fiecare sfert de an se aplică dobânda de 25%. Un calcul similar ne arată că 1£ crește astfel la 2,44141£. Câștigul nostru crește, iar pentru cele 10 000£ ale noastre – cel mai avantajos ar fi să împărțim anul și să aplicăm dobânzi mai mici la intervale mai mici de timp.

Dobândă compusă la fiecare…	Suma la final
an	2,00000
6 luni	2,25000
3 luni	2,44141
lună	2,61304
săptămână	2,69260
zi	2,71457
oră	2,71813
minut	2,71828
secundă	2,71828

Va crește astfel suma noastră dincolo de orice limită și putem ajunge milionari? Dacă împărțim anul în unități din ce în ce mai mici, ca în tabelul alăturat, acest „proces de limitare" arată că suma obținută la sfârșit are tendința să se stabilizeze la o constantă. Desigur, singura perioadă realistă de calcul de aici este pe zi (și este ceea ce fac efectiv băncile). Mesajul matematic este că această limită, pe care matematicienii o numesc *e*, este suma la care crește o depunere inițială de 1£ în situația în care compunerea dobânzilor este continuă. Este un lucru bun sau unul rău? Știți răspunsul: dacă ai economii depuse la bancă, răspunsul este „da"; dacă datorezi bani, este „nu". În ambele cazuri, este o problemă care ține de e.

VALOAREA EXACTĂ A LUI *e*

Ca și π, e este un număr irațional, așadar, la fel cum este cazul lui π, nu îi putem cunoaște valoarea exactă. Numărul e cu primele 20 de zecimale este 2,71828182845904523536...

Folosind doar fracții, cea mai bună aproximare a valorii lui e este $^{87}/_{32}$, dacă numărătorul și numitorul fracției sunt limitate la numere din două cifre. Ciudat este că, dacă numărătorul și numitorul sunt limitate la trei cifre, cea mai bună aproximare este $^{878}/_{323}$. Această a doua fracție este un fel de extensie palindromică

1748
Euler calculează e până la 23 de cifre. lui i se atribuie descoperirea celebrei formule $e^{i\pi} + 1 = 0$, în jurul acestui an.

1873
Hermite dovedește că e este un număr transcendent.

2007
e este calculat cu un număr de zecimale de ordinul 10^{11}.

a celei dintâi – matematica are un adevărat obicei de a oferi astfel de mici surprize. O serie bine cunoscută pentru exprimarea lui e este:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} + \cdots$$

În acest caz este foarte utilă notația factorială, care folosește semne de exclamare. De exemplu, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Folosind această notație, e ia forma mult mai cunoscută

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

Așadar, numărul e pare să prezinte un șablon. În ceea ce privește proprietățile lui matematice, e pare mult mai „simetric" decât π.

Dacă vreți o modalitate de a ține minte primele cifre ale lui *e*, încercați-o pe aceasta: „Pe numărul e savantul îl stimează, e academic și formează baza pentru logaritmi", unde numărul de litere al fiecărui cuvânt dă succesiunea cifrelor în numărul e. Cunoscătorii istoriei americane spun despre constanta *e* că ar fi „2,7 Andrew Jackson Andrew Jackson", pentru că Andrew Jackson, al șaptelea președinte al SUA, a fost ales în 1828. Există multe alte metode de acest gen pentru a-ți aminti zecimalele lui *e*, dar interesul pentru ele este legat mai degrabă de ciudățenia lor decât de importanța pentru matematică.

Faptul că *e* este irațional (nu este o fracție) a fost demonstrat de Leonhard Euler în 1737. În 1840, matematicianul francez Joseph Liouville a arătat că *e* nu poate fi soluția unei ecuații de gradul doi, iar, în 1873, conaționalul său Charles Hermite a demonstrat că *e* este transcendent (nu poate fi soluția vreunei ecuații algebrice). Cea mai importantă a fost metoda folosită de Hermite. Nouă ani mai târziu, Ferdinand von Lindemann a adaptat metoda lui Hermite pentru a dovedi că π este transcendent, o problemă cu o vizibilitate mult mai mare.

O întrebare și-a găsit răspunsul, dar au apărut unele noi. Numărul e ridicat la puterea e este și el transcendent? Este o expresie atât de bizară, cum ar putea fi altcumva? Și, totuși, faptul nu a fost demonstrat cu rigurozitate și, după standardele stricte ale matematicii, trebuie considerat și acum o conjectură. Matematicienii au înaintat treptat spre o dovadă și au demonstrat că este imposibil ca și e la puterea *e*, și *e* la puterea e^2 să fie amândouă transcendente. Aproape, dar nu suficient.

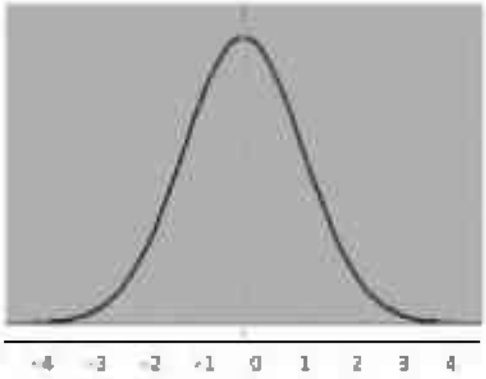
Conexiunile dintre π și e sunt fascinante. Valorile lui e^{π} și π^{e} sunt apropiate, dar este ușor de arătat (fără să li se calculeze efectiv valorile) că $e^{\pi} > \pi^{e}$. Dacă „trișați" și aruncați o privire la calculator, veți vedea că valorile lor aproximative sunt $e^{\pi} \approx 23{,}14069$ și $\pi^{e} \approx 22{,}45916$. Numărul e^{π} este cunoscut drept constanta lui Gelfond (numită după matematicianul rus Aleksandr Gelfond) și s-a demonstrat că este transcendent. Despre π^{e} se știu mult mai puține; încă nu s-a dovedit că este irațional – dacă într-adevăr este.

ESTE *e* IMPORTANT?

Principalul loc în care este de găsit este creșterea. Exemplele sunt creșterea economică și creșterea populațiilor. În legătură cu această constantă sunt și curbele folosite pentru a ilustra dezintegrarea radioactivă.

Numărul *e* apare și în probleme care nu au legătură cu creșterea. În secolul al XVIII-lea, Pierre Montmort a studiat o problemă de probabilitate care, de atunci, a fost cercetată pe scară largă. În varianta simplă, un grup de oameni merg la cină și apoi își iau pălăriile la întâmplare. Care este probabilitatea ca nimeni să nu-și nimerească propria pălărie?

Se poate arăta că această probabilitate este $^1/_e$ (aproximativ 37%), așadar probabilitatea ca o persoană cel puțin să își ia propria pălărie este $1 - {}^1/_e$ (63%). Aceasta este doar una dintre numeroasele aplicații în teoria probabilității. O alta este distribuția Poisson, care se ocupă de evenimentele rare. Sunt exemple de la începutul cercetărilor, dar nu au rămas unele izolate. James Stirling a reușit o remarcabilă aproximare a valorii factoriale *n!* folosind *e* (și π); în statistică, „curba clopot" a distribuției normale implică și ea constanta *e*, iar în inginerie, curba unui pod suspendat de cabluri depinde de *e*. Lista este fără sfârșit.



Distribuția normală

O IDENTITATE CRUCIALĂ

O remarcabilă formulă din matematică implică și ea constanta *e*. Când ne gândim la numere celebre din matematică, ne gândim la 0, 1, π, *e* și numărul imaginar $i = \sqrt{-1}$. Pare incredibil, dar

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Așa stau lucrurile, iar rezultatul îi este atribuit lui Euler.

Adevărata importanță a lui *e* stă poate și în misterul prin care a captivat generații de matematicieni. Una peste alta, *e* nu poate fi evitat. Greu de spus de ce un scriitor ca E.V. Wright s-ar supune efortului de a scrie un roman fără litera *e* – a avut probabil și un pseudonim –, dar exact asta este *Gadsby* al său. Și mai greu de imaginat ar fi un matematician care se apucă să scrie un manual fără litera *e* sau care ar reuși să facă asta.

Ideea de bază
cel mai natural dintre numere

07 Infinitul

Cât de mare este infinitul? Răspunsul scurt ar fi că ∞ (simbolul pentru infinit) este foarte mare. Gândiți-vă la o linie dreaptă cu numere din ce în ce mai mari așezate de-a lungul ei, o linie care se întinde „la infinit". Pentru fiecare număr uriaș produs, să zicem 10^{1000}, există întotdeauna un număr și mai mare, cum ar fi $10^{1000} + 1$.

Aceasta este ideea tradițională de infinit, cu numere care se înșiră la nesfârșit. Matematicienii folosesc infinitul în multe feluri, dar ne trebuie multă grijă atunci când infinitul este tratat ca un număr obișnuit, pentru că nu este.

NUMĂRAREA

Matematicianul german Georg Cantor ne-a oferit un cu totul alt fel de concept de infinit. Prin aceasta, el a creat o teorie din care provine mare parte din matematica modernă. Ideea pe care se bazează teoria lui Cantor are legătură cu o noțiune primitivă despre numărare, mai simplă decât cea pe care o folosim în activitățile zilnice.

Imaginați-vă un fermier care nu se pricepe să lucreze cu numere. Cum știe câte oi are? Foarte simplu – lasă oile să iasă la păscut dimineața, iar seara știe că s-au întors toate, dacă pentru fiecare oaie are o piatră în grămada de lângă poartă. Dacă lipsește o oaie, va lipsi și o piatră din grămadă. Chiar fără să folosească numere, fermierul nostru operează matematic. El folosește ideea de bijectivitate, mai precis corespondență unu-la-unu între oi și pietre. Această idee primitivă are consecințe surprinzătoare.

Teoria lui Cantor folosește mulțimi (o mulțime este, pur și simplu, o colecție de obiecte). De exemplu, **N** = {1,2,3,4,5,6,7,8,...} este mulțimea numerelor întregi pozitive. Odată ce avem o mulțime, putem vorbi despre submulțimi, care sunt mulțimi mai mici în interiorul mulțimii mai mari. Cele mai evidente submulțimi care au legătură cu mulțimea noastră **N** sunt submulțimile **I** = {1,3,5,7,...} și **P** = {2,4,6,8,...}, adică mulțimile numerelor impare, respectiv pare. La întrebarea dacă numărul de numere pare este egal cu numărul de numere impare, care ar fi răspunsul nostru? Cu toate că nu putem

CRONOLOGIE

350 î.Hr.	1639	1655
Aristotel respinge ideea unui infinit real.	Girard Desargues introduce conceptul de infinit în geometrie.	John Wallis este creditat ca fiind primul care a folosit „nodul dragostei", simbolul ∞, pentru infinit.

număra elementele fiecărei mulțimi și să comparăm rezultatele, răspunsul ar fi cu siguranță „da". Pe ce se bazează această siguranță? Probabil pe ceva de genul „jumătate dintre numere sunt pare și jumătate sunt impare". Cantor ar fi de acord cu răspunsul, dar ar da o justificare diferită. El ar spune că, de fiecare dată când avem un număr impar, avem alături de el și un „tovarăș" par. Ideea că mulțimile I și P au amândouă același număr de elemente se bazează pe „împerecherea" fiecărui număr impar cu unul par:

I: 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21...

P: 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22...

La întrebarea următoare, dacă „există același număr de numere întregi și de numere pare?", răspunsul firesc ar părea să fie „nu", argumentul fiind că **N** are de două ori mai multe numere decât mulțimea numerelor pare.

Noțiunea de „mai mult" este, însă, mai degrabă neclară atunci când avem de-a face cu mulțimi cu un număr nedeterminat de elemente. Ne-am putea descurca mai bine recurgând la ideea de corespondență unu-la-unu. Surprinzător, există o corespondență unu-la-unu între **N** și mulțimea numerelor pare, **P**:

N: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11...

P: 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22...

Ajungem la concluzia uimitoare că există „același număr" de numere întregi și de numere pare! Aceasta contrazice flagrant „evidența" declarată de greci din Antichitate; *Elementele* lui Euclid din Alexandria încep cu un text care spune că „întregul este mai mare decât partea".

CARDINALITATEA

Numărul de elemente ale unei mulțimi se numește „cardinalitatea" acesteia. În exemplul cu oile, cardinalitatea consemnată în registrele ciobanului este 42. Cardinalitatea mulțimii {a,b,c,d,e} este 5, iar aceasta se scrie card{a,b,c,d,e} = 5. Așadar, cardinalitatea este un indicator al „mărimii" unei mulțimi. Pentru

1874

Cantor tratează riguros noțiunea de infinit, specificând diferite ordine ale infinitului.

anii 1960

Abraham Robinson pune la punct o aritmetică non-standard, bazată pe noțiunea de infinitezimal.

cardinalitatea numerelor întregi *N* și a oricărei mulțimi în corespondență unu-la-unu cu *N*, Cantor a folosit simbolul $\aleph_0$ ($\aleph$ sau „alef" provine din alfabetul ebraic; se citește „alef zero"). Așadar, în limbaj matematic, putem scrie *card*(**N**) = *card*(**I**) = *card*(**P**) = $\aleph_0$.

Orice mulțime care poate fi pusă în corespondență unu-la-unu cu *N* este numită mulțime „numărabilă infinită". Aceasta înseamnă că putem scrie elementele mulțimii pe o listă. De exemplu, lista numerelor impare este 1,3,5,7,9,... și știm care element este primul, care este al doilea ș.a.m.d.

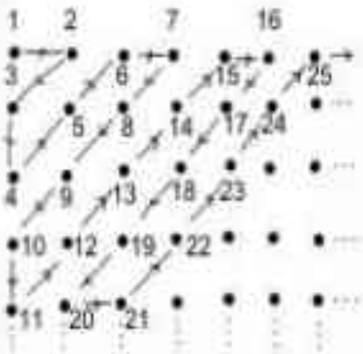
SUNT FRACȚIILE NUMĂRABILE INFINITE?

Mulțimea fracțiilor Q este mai mare decât N, în sensul că N poate fi privită ca o submulțime a mulțimii Q. Putem să scriem toate elementele mulțimii Q pe o listă?

1	-1	2	-2	3	-3	4	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-5}{2}$	$\frac{7}{2}$	...
$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{5}{3}$	...
$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{-5}{4}$	$\frac{7}{4}$	...
$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{5}{5}$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Putem alcătui o listă astfel încât orice fracție (inclusiv cele negative) să se regăsească undeva în ea? Ideea că o mulțime atât de mare poate fi pusă în corespondență unu-la-unu cu **N** pare imposibilă. Și, totuși, se poate face.

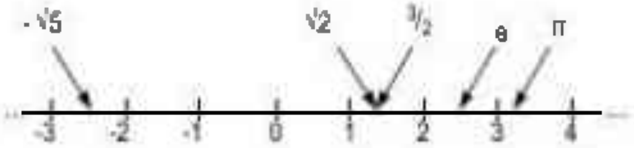
Pentru început, să gândim problema în două dimensiuni. Scriem pe un rând toate numerele întregi, pozitive și negative, alternativ. Sub ele scriem toate fracțiile care au numitorul 2, dar le omitem pe cele care au apărut deja pe rândul de deasupra (cum ar fi $^6/_2 = 3$). Sub acest rând scriem fracțiile care au numitorul 3, dar iarăși le omitem pe cele consemnate deja. Continuăm în acest mod, fără să ajungem vreodată la un final, dar știind exact unde apare fiecare fracție în această diagramă. De exemplu, $^{209}/_{67}$ se află în rândul 67, cam cu 200 de poziții în dreapta lui $^1/_{67}$.



Dacă așezăm în acest mod toate fracțiile, în principiu, putem alcătui, până la urmă, o listă unidimensională. Dacă începem de la rândul de sus și ne deplasăm spre dreapta, poziție cu poziție, nu vom ajunge niciodată la rândul al doilea. Este, însă, posibil să alegem o cale întortocheată, în zigzag, pe care să reușim. Începând de la 1, lista liniară începe: 1, −1, $^1/_2$, $^1/_3$, $-^1/_2$, 2, −2 și tot așa, urmând săgețile. Fiecare fracție, pozitivă sau negativă, se găsește undeva pe această listă și, invers, fiecare poziție are un „tovarăș" pe lista bidimensională de fracții. Așadar, ajungem la concluzia că mulțimea de fracții **Q** este numărabil infinită și scriem *card*(**Q**) = $\aleph_0$.

LISTA NUMERELOR REALE

Dacă setului de fracții îi corespund numeroase elemente de pe linia numerelor reale, există, totuși, numere reale precum $\sqrt{2}$, e și π care nu sunt fracții. Acestea sunt numere iraționale – ele „umplu" golurile, ca să ne dea linia numerelor reale R.



Odată golurile umplute, mulțimea ℝ devine un „continuum". Așadar, cum am putea face o listă a numerelor reale? Printr-o mișcare strălucită, Cantor a demonstrat că până și încercarea de a pune pe o listă numerele reale dintre 0 și 1 este sortită eșecului. Aceasta va fi, fără îndoială, un șoc pentru pasionații de liste, care se vor întreba, pe bună dreptate, cum să nu poți scrie o mulțime de numere unul după altul.

Să presupunem că nu îl credeți pe Cantor. Știți că fiecare număr dintre 0 și 1 poate fi exprimat ca un șir extins de zecimale, de exemplu $\frac{1}{2}$ = 0,50000000000000000... și $\frac{1}{\pi}$ = 0.31830988618379067153... așa că i-ați spune lui Cantor: „Iată lista mea de numere între 0 și 1", pe care le vom numi r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 ... Dacă însă există un număr pe care nu îl puteți arăta pe listă, atunci Cantor are dreptate.

Imaginați-vă cum se uită Cantor pe lista voastră și marchează cu **bold** numerele de pe diagonală:

r_1: $0.\mathbf{a_1}a_2a_3a_4a_5\ldots$
r_2: $0.b_1\mathbf{b_2}b_3b_4b_5\ldots$
r_3: $0.c_1c_2\mathbf{c_3}c_4c_5\ldots$
r_4: $0.d_1d_2d_3\mathbf{d_4}d_5\ldots$

Cantor ar putea să vă spună: „Bine, dar unde este numărul $x = x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$ unde x_1 este diferit de a_1, x_2 este diferit de b_2, x_3 este diferit de c_3 și tot așa, mergând în jos pe diagonală?". X al lui are o zecimală diferită de orice număr de pe lista dumneavoastră, așadar nu se află acolo. Cantor are dreptate.

De fapt, nu se poate alcătui nici o listă pentru mulțimea numerelor reale ℝ, care este așadar o mulțime infinită „mai mare" decât infinitul mulțimii de fracții ℚ. „Mare" tocmai a devenit și mai mare.

Idee de bază
o avalanșă de infinituri

08 Numere imaginare

Bineînțeles că ne putem imagina numere. Câteodată îmi imaginez că am în cont un milion de lire sterline și fără îndoială că este vorba de un „număr imaginar". Dar imaginarul din matematică nu are nimic de-a face cu visatul cu ochii deschiși.

Se crede că eticheta de „imaginar" este datorată filosofului și matematicianului René Descartes, în semn de recunoaștere a rezultatelor unor ecuații ciudate, care, în mod sigur, nu erau numere obișnuite. Există sau nu numere imaginare? Întrebarea a fost mult analizată de filosofi, care s-au concentrat asupra termenului de imaginar. Matematicienii nu sunt, însă, preocupați de existența numerelor imaginare. Acestea fac parte din viața de zi cu zi, la fel ca numerele 5 sau π. Poate că numerele imaginare nu vă sunt de ajutor când ieșiți la cumpărături, dar, dacă întrebați un proiectant de avioane sau un inginer electronist, veți afla că sunt de importanță vitală. Iar prin însumarea unui număr real cu un număr imaginar, obținem ceea ce se numește un „număr complex", denumire care potolește imediat neliniștile filosofice. Teoria numerelor complexe se bazează pe rădăcina pătrată a lui −1. Așadar, ce număr ridicat la pătrat dă −1?

Dacă luați orice număr diferit de zero și îl înmulțiți cu el însuși (îl ridicați la pătrat), obțineți întotdeauna un număr pozitiv. Acest lucru este evident când ridicăm la pătrat numere pozitive, dar este adevărat și când ridicăm la pătrat numere negative? Putem folosi −1 × −1 pentru a face un test. Chiar dacă am uitat regula din școală că „două minusuri dau plus", poate ne aducem aminte că răspunsul este fie −1, fie +1. Dacă am crede că −1 × −1 este egal cu −1, atunci am putea împărți fiecare parte cu −1 și am ajunge la concluzia că −1 = 1, ceea ce este absurd. Ajungem așadar la concluzia că −1 × −1 = 1, care este pozitiv. Același argument poate fi folosit pentru orice numere negative, nu doar −1, așadar, când ridicăm la pătrat orice număr negativ, rezultatul nu poate fi negativ.

CRONOLOGIE

1572 d.Hr.
Rafael Bombelli face calcule cu numere imaginare.

1777
Euler folosește pentru prima dată simbolul i ca să reprezinte rădăcina pătrată a lui −1.

1806
Reprezentarea schematică a lui Argand duce la denumirea de „diagrama lui Argand".

Acesta a fost un punct de blocaj în primii ani ai numerelor complexe, în secolul al XVI-lea. Când dificultatea a fost depășită, răspunsul a eliberat matematica din lanțurile numerelor obișnuite și a deschis vaste câmpuri de cercetare, la care nici nu se visase până atunci. Dezvoltarea numerelor complexe este „o completare a numerelor reale", spre un sistem și mai natural, perfect.

RĂDĂCINA PĂTRATĂ A LUI −1

Am văzut deja că pe linia numerelor reale

nu există și rădăcina pătrată a lui −1, pentru că pătratul oricărui număr real nu poate fi negativ. Decât să ne gândim în continuare la numere doar pe linia numerelor reale, mai bine ne lăsăm păgubași, continuăm să le spunem numere imaginare, mergem să bem un ceai cu filosofii și nu mai avem nimic de-a face cu ele. Sau am putea să facem un pas îndrăzneț și să acceptăm $\sqrt{-1}$ ca fiind o nouă entitate, pe care o notăm *i*.

Prin acest simplu act mental, numerele imaginare capătă existență. Ce anume sunt ele nu știm, dar credem în existența lor. Măcar știm că $i^2 = -1$. Așadar, în noul nostru sistem de numere îi avem pe toți vechii noștri prieteni, numerele reale ca 1, 2, 3, 4, π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, la care se adaugă unii noi în care apare *i*, cum ar fi $1+2i$, $-3+i$, $2+3i$, $1+i\sqrt{2}$, $\sqrt{3}+2i$, $e+\pi i$ etc.

Acest pas important în matematică a fost făcut la începutul secolului al XIX-lea, când am scăpat de pe linia unidimensională a numerelor într-un straniu plan bidimensional al numerelor.

$\sqrt{-1}$ în inginerie

Chiar și inginerii, oameni foarte practici din felul lor, au găsit utilizări pentru numerele complexe. Când Michael Faraday a descoperit curentul alternativ, în anii 1830, numerele imaginare au căpătat realitate fizică. În acest caz, se folosește litera *j* pentru $\sqrt{-1}$ în locul lui *i*, pentru că *i* este un simbol legat de curentul electric.

ADUNAREA ȘI ÎNMULȚIREA

Acum, că avem în minte numerele complexe, numere cu forma $a + bi$, ce putem face cu ele? La fel ca numerele reale, ele pot fi adunate și înmulțite unele cu altele. Pentru adunare, adunăm, pur și simplu, părțile respective. Așadar, $2 + 3i$ adunat cu $8 + 4i$ este egal cu $(2 + 8) + (3 + 4)i$ cu rezultatul $10 + 7i$.

1811

Carl Friedrich Gauss lucrează cu funcții ce au numere complexe drept variabile.

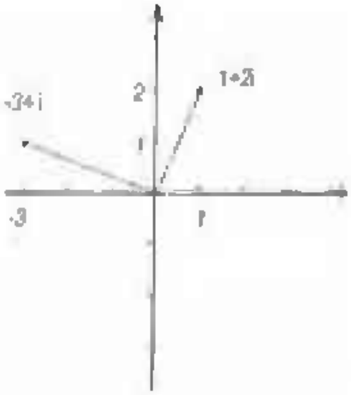
1837

William R. Hamilton tratează numerele complexe ca fiind perechi ordonate de numere reale.

Înmulțirea este aproape la fel de simplă. Dacă vrem să înmulțim $2 + 3i$ cu $8 + 4i$, începem prin a înmulți simbolurile din fiecare pereche:

$$(2 + 3i) \times (8 + 4i) = (2 \times 8) + (2 \times 4i) + (3i \times 8) + (3i \times 4i)$$

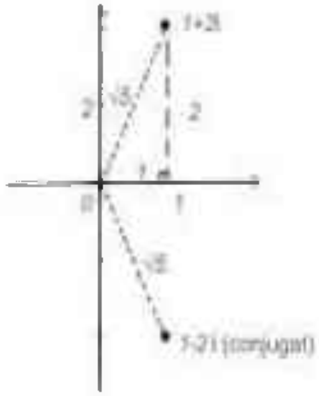
și adunăm termenii obținuți, 16, $8i$, $24i$ și $12i^2$ (în acest ultim termen, înlocuim i^2 cu -1). Rezultatul acestei înmulțiri este așadar $(16 - 12) + (8i + 24i)$, ceea ce este numărul complex $4 + 32i$.



Cu numerele complexe sunt respectate toate regulile obișnuite ale aritmeticii. Scăderea și împărțirea sunt posibile întotdeauna (cu excepția numărului complex $0 + 0i$, dar împărțirea nu era permisă cu 0 nici între numerele reale). De fapt, numerele complexe se bucură de toate proprietățile numerelor reale, mai puțin una. Nu le putem împărți în numere pozitive și numere negative, așa cum făceam cu numerele reale.

DIAGRAMA ARGAND

Bidimensionalitatea numerelor complexe devine evidentă dacă le reprezentăm pe o diagramă. Numerele complexe $-3 + i$ și $1 + 2i$ pot fi desenate pe ceea ce numim o diagramă Argand. Acest mod de reprezentare a numerelor complexe a fost numit după Jean Robert Argand, un matematician elvețian, deși au fost și alții care au folosit noțiuni similare, cam în aceeași perioadă.



Fiecare număr complex are un „tovarăș", numit oficial „conjugatul" lui. Tovarășul lui $1 + 2i$ este $1 - 2i$, găsit prin inversarea semnului din fața celei de-a doua componente. Tovarășul lui $1 - 2i$, la fel, este $1 + 2i$, tovarăși, deci, în adevăratul sens al cuvântului.

Adunarea și înmulțirea a doi tovarăși dau întotdeauna un număr real. În cazul adunării lui $1 + 2i$ cu $1 - 2i$ obținem 2, iar, dacă le înmulțim, obținem 5. Această înmulțire este mai interesantă. Rezultatul 5 este pătratul „lungimii" numărului complex $1 + 2i$ și este egal și cu lungimea perechii lui. Altfel spus, putem defini lungimea unui număr complex ca fiind:

$$\text{lungimea lui } w = \sqrt{(w \times \text{conjugatul lui } w)}$$

Verificând aceasta pentru $-3 + i$, găsim că lungimea lui $(-3 + i) = \sqrt{(-3 + i) \times (-3 - i)} = \sqrt{(9 + 1)}$, așadar lungimea lui $(-3 + i) = \sqrt{10}$.

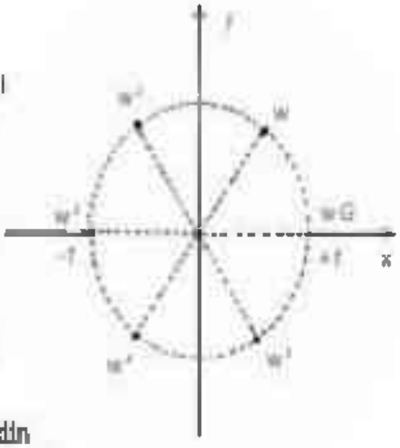
Separarea numerelor complexe de misticism i se datorează, în mare măsură, lui sir William Rowan Hamilton, prim-ministrul matematician al Irlandei din secolul al XIX-lea. El a recunoscut că nu era neapărat nevoie de i pentru teorie. Acesta este doar

un substituent și poate fi eliminat. Hamilton a considerat numerele complexe ca fiind „perechi ordonate" de numere reale (a, b), evidențiind calitatea lor bidimensională fără să apeleze la misticul $\sqrt{-1}$. Văduvită de i, adunarea devine

$$(2, 3) + (8, 4) = (10, 7)$$

și, mai puțin evident, înmulțirea este

$$(2, 3) \times (8, 4) = (4, 32)$$



Caracterul complet al sistemului numerelor complexe devine și mai clar atunci când ne gândim la ceea ce se numește „rădăcini de ordin n ale unității" (pentru matematicieni, „unitate" înseamnă „unu"). Acestea sunt soluții ale ecuației $z^n = 1$. Să luăm ca exemplu $z^6 = 1$. Pe linia numerelor reale există două rădăcini $z = 1$ și $z = -1$ (pentru că $1^6 = 1$ și $(-1)^6 = 1$), dar unde sunt celelalte, când ar trebui, cu siguranță, să avem șase? Ca și cele două rădăcini reale, toate cele șase rădăcini au lungime unitară și se găsesc pe cercul centrat pe origine și care are raza unitară.

Mai mult, dacă ne uităm la $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, care este rădăcina din primul sfert de cerc, rădăcinile succesive (în sens contrar acelor de ceasornic) sunt w^2, w^3, w^4, w^5, $w^6 = 1$, așezate pe colțurile unui hexagon regulat. În general, rădăcinile de ordin n ale unității vor fi așezate pe un cerc, la colțurile unui poligon regulat cu n laturi.

EXTINDEREA NUMERELOR COMPLEXE

Odată ce matematicienii au avut numerele complexe, ei au căutat instinctiv generalizări. Numerele complexe au două dimensiuni, dar de ce ar fi 2 special? Hamilton a încercat ani de zile să construiască numere tridimensionale și să pună la punct o modalitate de a le aduna și a le înmulți, dar a avut succes doar când a trecut la patru dimensiuni. La scurt timp după aceea, aceste numere în patru dimensiuni au fost ele însele generalizate la opt dimensiuni (denumite numere Cayley). Mulți s-au gândit la numere în 16 dimensiuni, ca o continuare posibilă a teoriei – dar, la 50 de ani după saltul remarcabil al lui Hamilton, s-a dovedit că sunt imposibile.

Idee de bază
numere nereale, cu utilizări reale

09 Numere prime

Matematica este un subiect atât de amplu, ce traversează toate domeniile acțiunii umane, încât, uneori, poate să pară copleșitoare. Câteodată trebuie să ne întoarcem la noțiunile elementare. Aceasta înseamnă, invariabil, o întoarcere la numerele naturale, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12... Există oare ceva mai simplu de atât?

Ei bine, $4 = 2 \times 2$ și astfel îl putem descompune în elemente primare. Putem descompune orice număr? Iată alte câteva exemple: $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 2 \times 2$, $9 = 3 \times 3$, $10 = 2 \times 5$, $12 = 2 \times 2 \times 3$. Acestea sunt numere compuse, pentru că ele sunt construite din cele de bază, 2, 3, 5, 7, ... Numerele care nu se pot descompune astfel sunt 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... Acestea sunt numerele prime. Un număr prim este un număr care este divizibil doar cu 1 și cu el însuși. V-ați putea întreba atunci dacă 1 însuși este un număr prim. Conform acestei definiții, ar trebui să fie și, într-adevăr, mulți matematicieni importanți din trecut l-au tratat pe 1 ca fiind număr prim, dar matematicienii moderni încep șirul numerelor prime cu 2. Aceasta permite ca teoremele să fie mai elegant formulate. Și, pentru noi, 2 este primul număr prim.

Să subliniem numerele prime de la începutul șirului numerelor naturale: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, ... Studiul numerelor prime ne trimite înapoi, la cele mai elementare noțiuni. Numerele prime sunt importante pentru că ele sunt „atomii" matematicii. La fel ca elementele chimice din care sunt formați toți ceilalți compuși chimici, numerele prime pot fi folosite pentru a alcătui compuși matematici.

Rezultatul matematic care sintetizează toate acestea poartă denumirea impresionantă de „teorema descompunerii în numere prime". Aceasta spune că, pentru orice număr întreg mai mare decât 1, există un singur mod de a-l scrie prin multiplicarea unor numere prime. Am văzut că $12 = 2 \times 2 \times 3$ și că nu există nici un alt mod de a-l scrie cu alte numere prime. Deseori se folosește notația cu puteri: $12 = 2^2 \times 3$. Și un alt exemplu: 6 545 448 poate fi scris $2^3 \times 3^5 \times 7 \times 13 \times 37$.

CRONOLOGIE

300 î.Hr.

Elementele lui Euclid aduc dovada că există o infinitate de numere prime

230 î.Hr.

Eratostene din Cyrene descrie un algoritm pentru selectarea numerelor prime dintre cele naturale

CUM GĂSIM NUMERE PRIME

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Din nefericire, nu există formule prestabilite pentru identificarea numerelor prime și se pare că nu există nici un tipar în apariția lor printre numerele naturale. Una dintre primele metode pentru găsirea lor a fost pusă la punct de un tânăr contemporan cu Arhimede, care și-a petrecut cea mai mare parte a vieții în Atena, Eratostene din Cyrene. Calculul exact pe care l-a făcut pentru lungimea Ecuatorului a fost foarte admirat la vremea lui. Astăzi este amintit pentru așa-numitul său „ciur" pentru găsirea numerelor prime. Eratostene și-a imaginat numerele naturale înșirate în fața lui. El a subliniat 2 și a eliminat toți multiplii lui 2. Apoi s-a mutat la 3, l-a subliniat și a eliminat toți multiplii lui 3. Continuând în acest mod, a „cernut" toate numerele compuse. Numerele subliniate rămase la final erau numerele prime.

Așadar, putem identifica numerele prime, dar cum stabilim dacă un număr dat este prim sau nu? Ce putem spune despre 19 071 sau 19 073? Cu excepția numerelor prime 2 și 5, un număr prim trebuie să se termine în 1, 3, 7 sau 9, dar asta nu este suficient pentru a face dintr-un număr unul prim. Este greu de spus dacă un număr mare care se termină în 1, 3, 7 sau 9 este prim fără să testezi posibilii divizori. Și, pentru că veni vorba, $19{,}071 = 3^2 \times 13 \times 163$ nu este un număr prim, dar 19,073 este.

O altă provocare a fost descoperirea unor eventuale tipare în distribuția numerelor prime. Să vedem câte numere prime sunt în fiecare interval de 100 dintre 1 și 1 000.

Interval	1–100	101–200	201–300	301–400	401–500	501–600	601–700	701–800	801–900	901–1 000	1–1 000
Numere prime	25	21	16	16	17	14	16	14	15	14	168

În 1792, când avea doar 15 ani, Carl Friedrich Gauss a sugerat o formulă *P*(*n*) pentru estimarea numărului de numere prime mai mici decât un număr dat, *n* (numită acum teorema numerelor prime). Pentru *n* = 1 000, formula dă valoarea aproximativă de 172. Numărul exact de numere prime, 168, este mai mic decât această estimare. S-a presupus

1742 d.Hr.
Goldbach speculează că fiecare număr par (mai mare decât 2) este suma a două numere prime.

1896
Este demonstrată teorema numerelor prime, referitoare la distribuția acestora.

1966
Chen Jingrun aproape confirmă conjectura Goldbach.

întotdeauna că așa stau lucrurile pentru orice valoare a lui n, dar numerele prime rezervă deseori surprize și s-a arătat că pentru $n = 10^{371}$ (un număr uriaș, scris desfășurat ca 1 urmat de 371 de zerouri) numărul de numere prime *depășește* estimarea. De fapt, în unele domenii ale numerelor naturale, diferența dintre estimare și numărul efectiv oscilează între mai puțin și exces.

CÂT DE MULTE?

Există o infinitate de numere prime. Euclid a afirmat, în *Elementele* sale (Cartea 9, Propoziția 20), că „numerele prime sunt mai numeroase decât orice multitudine desemnată de numere prime". Demonstrația elegantă a lui Euclid este următoarea:

> Să presupunem că *P* este cel mai mare număr prim și să considerăm numărul $N = (2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times P) + 1$. *N* poate fi prim sau nu. Dacă *N* este prim, atunci am produs un număr prim mai mare decât *P*, ceea ce contrazice presupunerea inițială. Dacă *N* nu este prim, atunci el trebuie să fie divizibil cu un număr prim, să îi spunem *p*, care este unul dintre numerele 2, 3, 5, …, *P*. Aceasta înseamnă că *p* îl divide pe $N - (2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times P)$. Dar acest număr este egal cu 1, iar asta înseamnă că *p* este 1. Dar asta nu este posibil, de vreme ce toate numerele prime sunt mai mari decât 1. Astfel, oricare ar fi natura lui *N*, ajungem la o contradicție. Presupunerea noastră inițială, că ar exista cel mai mare număr prim *P*, este așadar falsă. Concluzie: numărul de numere prime este fără limită.

Cu toate că numerele prime „merg spre infinit", faptul nu i-a împiedicat pe oameni să caute cel mai mare număr prim cunoscut. Recordul a fost deținut la un moment dat de un enorm număr *Mersenne* $2^{[illegible]} - 1$, care este aproximativ $10^{7235732}$, sau un număr care începe cu 1 urmat de 7 235 732 de zerouri.

NECUNOSCUTE

Cele mai importante necunoscute legate de numerele prime sunt „problema numerelor prime gemene" și faimoasa „conjectură Goldbach".

Numerele prime gemene sunt perechi de numere prime consecutive separate doar de un număr par. De la 1 la 100, numerele prime gemene sunt 3, 5; 5, 7; 11, 13; 17, 19; 29, 31; 41, 43; 59, 61; 71, 73. Pe frontul numeric, se știe că există 27 412 679 numere prime gemene mai mici decât 10^{10}. Aceasta înseamnă că numerele pare cu gemene, cum este 12 (încadrat de gemenii 11 și 13), reprezintă doar 0,274% din numerele din acest interval. Există un număr infinit de numere prime gemene? Ar fi ciudat să nu fie așa, dar, până acum, nimeni nu a reușit să pună pe hârtie o demonstrație.

Christian Goldbach a presupus că:

> *Fiecare număr par mai mare decât 2 este suma a două numere prime.*

De exemplu, 42 este un număr par și îl putem scrie ca 5 + 37. Faptul că putem să îl scriem și ca 11 + 31, 13 + 29 sau 19 + 23 nu are importanță – tot ce ne trebuie este o modalitate. Conjectura este adevărată pentru o serie uriașă de numere, dar nu a fost niciodată dovedită în general. S-au făcut, totuși, progrese, iar unii au senzația că demonstrația nu este departe. Matematicianul chinez Chen Jingrun a făcut un pas uriaș. Teoria lui afirmă că orice număr par suficient de mare poate fi scris ca suma a două numere prime sau suma unui număr prim cu un semi-prim (un număr care este produsul a două numere prime).

Numărul numerologilor

Unul dintre cele mai provocatoare domenii ale teoriei numerelor se referă la „problema lui Waring". În 1770, un profesor la Cambridge, Edward Waring, a formulat probleme legate de scrierea numerelor întregi ca sume de puteri. În acest cadru, arta magică a numerologiei s-a întâlnit cu știința rece a matematicii sub forma numerelor prime, a sumelor de pătrate și a sumelor de cuburi. În numerologie, misticul număr 666, „numărul fiarei" din Apocalipsă, are niște proprietăți neașteptate. El este suma pătratelor primelor 7 numere prime:

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$$

Numerologii vor fi nerăbdători să sublinieze că este și suma cuburilor palindromice și, dacă încă nu este destul, reperul 6^3 din mijloc este scrierea prescurtată pentru 6 × 6 × 6:

$$666 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3$$

Numărul 666 este cu adevărat „numărul numerologilor".

Marele teoretician al numerelor Pierre de Fermat a demonstrat că numerele prime de forma 4k + 1 pot fi exprimate într-un singur mod ca suma a două pătrate (de exemplu, $17 = 1^2 + 4^2$), în timp ce acelea de forma 4k + 3 (19, de exemplu) nu pot fi scrise deloc ca suma a două pătrate. Joseph Lagrange a demonstrat și el o faimoasă teoremă matematică despre numerele la puterea a doua: orice număr întreg pozitiv este suma a patru pătrate. De exemplu, $19 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2$. Au fost studiate și puterile mai mari și s-au umplut cărți întregi cu teoreme, dar rămân numeroase probleme.

Am descris numerele prime ca fiind „atomii matematicii". Dar veți întreba: „fizicienii au mers dincolo de atomi, către unități și mai de bază, cum ar fi quarcurile. Matematica a rămas pe loc?" Dacă ne limităm la numerele naturale, 5 este un număr prim și va fi așa întotdeauna. Dar Gauss a făcut o descoperire de anvergură, că, pentru unele numere prime, cum ar fi 5, $5 = (1 - 2i) \times (1 + 2i)$, $i = \sqrt{-1}$ din sistemul numerelor imaginare. Ca produs între doi întregi Gauss, 5 și numerele asemenea lui nu mai sunt atât de ermetice pe cât se presupunea odată.

Idee de bază
atomii matematicii

10 Numere perfecte

Căutarea perfecțiunii în matematică i-a condus pe aspiranți în locuri diferite. Există pătrate perfecte, dar termenul nu este folosit aici în sens estetic. Are rolul să te avertizeze că există și pătrate care sunt imperfecte. În altă direcție, unele numere au divizori puțini, iar altele au mulți. Dar, ca în povestea celor trei urși, unele numere sunt „numai bune". Când suma divizorilor unui număr este egală cu numărul însuși, se spune că numărul este perfect.

Filosoful grec Speusippus, care a preluat conducerea Academiei de la unchiul său, Platon, a declarat că pitagoreicii credeau că 10 are recomandările necesare pentru perfecțiune. De ce? Pentru că numărul de numere prime dintre 1 și 10 (respectiv 2, 3, 5, 7) este egal cu numărul de non-prime (4, 6, 8, 9) și este cel mai mic număr cu această proprietate. Unii oameni au idei ciudate despre perfecțiune.

Se pare că pitagoreicii elaboraseră, de fapt, un concept mai bogat despre numerele perfecte. Proprietățile matematice ale numerelor perfecte au fost schițate de Euclid în *Elemente* și studiate în profunzime de Nicomachus 400 de ani mai târziu, ducând la numere amiabile (prietene) și chiar la numere sociabile. Aceste categorii erau definite în termenii relației dintre numere și divizorii lor. La un moment dat, au ajuns la teoria numerelor abundente și deficiente, iar aceasta i-a condus la conceptul de perfecțiune.

Dacă un număr este abundent, se determină cu ajutorul divizorilor lui și folosește conexiunea dintre înmulțire și adunare. Să luăm numărul 30 și să-l trecem în revistă divizorii, adică toate numerele la care se împarte exact și care sunt mai mici de 30. Pentru un număr mic, cum este 30, vedem că divizorii sunt 1, 2, 3, 5, 6, 10 și 15. Adunând acești divizori, obținem 42. Numărul 30 este abundent, deoarece suma divizorilor (42) este mai mare decât numărul însuși, 30.

CRONOLOGIE

525 î.Hr.
Pitagoreicii sunt asociați și cu numerele perfecte, și cu cele abundente.

300 î.Hr.
Cartea 9 din *Elementele* lui Euclid abordează numerele perfecte.

100 d.Hr.
Nicomachus din Gerasa realizează o clasificare a numerelor bazată pe numerele perfecte.

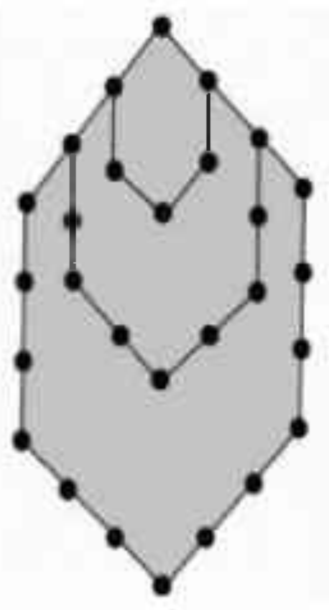
Rang	1	2	3	4	5	6	7
Număr perfect	6	28	496	8 128	33 550 336	8 589 869 056	137 438 691 328

Primele numere perfecte

Un număr este deficient dacă este adevărat contrariul – dacă suma divizorilor este mai mică decât numărul însuși. Astfel, numărul 26 este deficient pentru că divizorii lui sunt 1, 2 și 13, iar suma lor este 16, mai mică decât 26. Numerele prime sunt deficiente, pentru că suma divizorilor lor este întotdeauna 1.

Un număr care nu este nici abundent, nici deficient este un număr perfect. Suma divizorilor unui număr perfect este egală cu numărul însuși. Primul număr perfect este 6. Divizorii lui sunt 1, 2, 3 și, când îi adunăm, obținem 6. Pitagoreicii erau atât de încântați de numărul 6 și de modul în care se îmbină componentele lui, încât îi spuneau „căsătorie, sănătate și frumusețe". Există și o altă poveste despre numărul 6, spusă de Sf. Augustin (354–430). El credea că perfecțiunea lui 6 a existat înainte să existe lumea și că lumea a fost creată în 6 zile, *pentru că* numărul era perfect.

Următorul număr perfect este 28. Divizorii lui sunt 1, 2, 4, 7 și 14, iar, când îi adunăm, obținem 28. Aceste prime două numere perfecte, 6 și 28, sunt speciale și printre numerele perfecte, deoarece se poate demonstra că orice număr perfect par se termină sau în 6, sau în 28. După 28, trebuie să așteptați până la 496 ca să găsiți următorul număr perfect. Este ușor de verificat că numărul este într-adevăr suma divizorilor lui: 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248. Pentru următoarele numere perfecte trebuie să mergem într-un fel de stratosferă a aritmeticii. În secolul al XVI-lea, erau cunoscute primele cinci, dar încă nu știm care este cel mai mare sau dacă șirul lor merge până la infinit. Balanța opiniilor înclină, la fel ca în cazul numerelor prime, spre varianta că ele continuă la nesfârșit.



Pitagoreicii erau pasionați de conexiunile geometrice. Dacă avem un număr perfect de mărgele, acestea pot fi dispuse în jurul unui colier hexagonal. În cazul numărului 6, acesta este un simplu hexagon, cu mărgelele amplasate în colțuri, dar pentru numere mai mari va trebui să adăugăm sub-coliere mai mici în interiorul colierului mare.

1603

Pietro Cataldi găsește al șaselea și al șaptelea număr perfect, $2^{16}(2^{17}-1) = 8\ 589\ 869\ 056$ și $2^{18}(2^{19}-1) = 137\ 438\ 691\ 328$

2006

Primul mare proiect de căutare descoperă al 44-lea număr prim Mersenne (cu aproape 10 milioane de cifre) și, totuși, poate fi generat un număr perfect și mai mare.

Puterea	Rezultat	Minus 1 (număr Mersenne)	Număr prim?
2	4	3	da
3	8	7	da
4	16	15	nu
5	32	31	da
6	64	63	nu
7	128	127	da
8	256	255	nu
9	512	511	nu
10	1 024	1 023	nu
11	2 048	2 047	nu
12	4 096	4 095	nu
13	8 192	8 191	da
14	16 384	16 383	nu
15	32 768	32 767	nu

NUMERE MERSENNE

Cheia pentru construirea numerelor perfecte este un set de numere denumite după părintele Marin Mersenne, un călugăr francez care a studiat într-un colegiu iezuit împreună cu René Descartes. Amândoi erau interesați de găsirea numerelor perfecte. Numerele Mersenne sunt construite din puterile lui 2, numerele dublate 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ... din care se scade 1. Un număr Mersenne este un număr de forma $2^n - 1$. Acestea sunt întotdeauna impare, dar nu sunt întotdeauna și prime. Tocmai acele numere Mersenne care sunt și prime pot fi folosite pentru construirea numerelor perfecte.

Mersenne știa că, dacă puterea nu era un număr prim, atunci nici numărul Mersenne nu putea fi un număr prim, fapt dovedit pentru puterile non-prime 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14 și 15 din tabel. Numerele Mersenne puteau fi prime doar dacă puterea era primă, dar era asta suficient? Pentru cele dintâi cazuri, obținem 3, 7, 31 și 127, care sunt toate prime. Așadar este, în general, adevărat că un număr Mersenne format cu o putere primă este și el prim?

Din Antichitate până în jurul anului 1500, mulți matematicieni au crezut că așa stau lucrurile. Dar simplitatea nu este un apanaj al numerelor prime și s-a descoperit că, pentru puterea 11 (un număr prim), $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ și, în consecință, nu este un număr prim. Pare să nu existe nicio regulă. Numerele Mersenne $2^{17} - 1$

Doar buni prieteni

Matematicianul riguros rămâne, de obicei, insensibil la mistica numerelor, dar numerologia încă nu a murit. Numerele prietene au venit după numerele perfecte, dar s-ar putea să fi fost cunoscute pitagoreicilor. Mai târziu au devenit folositoare pentru alcătuirea horoscoapelor romantice, unde proprietățile lor matematice influențau natura legăturii eterice. Numerele 220 și 284 sunt numere prietene. Ce înseamnă asta? Ei bine, divizorii lui 220 sunt 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 și 110, iar, dacă îi însumați, obțineți 284. Ați ghicit. Dacă identificați divizorii lui 284 și îi însumați, obțineți 220. O adevărată prietenie!

și $2^{19} - 1$ sunt amândouă prime, dar $2^{23} - 1$ nu este prim, pentru că

$$2^{23} - 1 = 8\,388\,607 = 47 \times 178\,481$$

ACTIVITATE DE CONSTRUCȚIE

O combinație a ideilor lui Euclid și Euler oferă o formulă pentru generarea numerelor perfecte pare: n este un număr perfect par dacă și numai dacă $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, unde $2^p - 1$ este un număr prim Mersenne.

De exemplu, $6 = 2^1(2^2 - 1)$, $28 = 2^2(2^3 - 1)$ și $496 = 2^4(2^5 - 1)$. Această formulă pentru calculul numerelor perfecte pare înseamnă că le putem genera dacă putem să găsim numerele prime Mersenne. Numerele perfecte au pus la încercare și oamenii, și mașinile și vor continua să o facă în moduri pe care matematicienii din vechime nu și le imaginau. Scriind la începutul secolului al XIX-lea, matematicianul Peter Barlow, cu tabelele lui, credea că nimeni nu avea să meargă dincolo de calculul numărului perfect al lui Euler

$$2^{30}(2^{31} - 1) = 2\,305\,843\,008\,139\,952\,128$$

și nici nu avea rost să facă asta. El nu avea cum să prevadă puterea computerelor moderne și a matematicienilor care nu se satură niciodată de noi provocări.

Numere prime Mersenne

Descoperirea numerelor prime Mersenne nu este ușoară. De-a lungul secolelor, mulți matematicieni au făcut adăugiri la această listă care are o istorie zbuciumată, construită pe un amestec de eronat și corect. Marele Leonhard Euler a contribuit cu al optulea număr prim Mersenne, $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$, în 1732. Găsirea celui de-al 23-lea număr prim Mersenne, $2^{11213} - 1$, a fost, în 1963, motiv de mândrie pentru Catedra de matematică a Universității din Illinois, care a anunțat acest lucru lumii prin emiterea unui timbru. Industria numerelor prime Mersenne a avansat însă odată cu puterea computerelor, iar, la sfârșitul anilor 1970, liceenii Laura Nickel și Landon Noll au descoperit împreună al 25-lea număr prim Mersenne, Noll obținându-l și pe al 26-lea. Până acum au fost descoperite 45 de numere prime Mersenne.

NUMERE PERFECTE IMPARE

Nimeni nu știe dacă va fi găsit vreodată un număr perfect impar. Descartes nu credea că e posibil, dar și experții pot să se înșele. Matematicianul englez James Joseph Sylvester a afirmat că existența unui număr perfect impar „ar fi aproape un miracol", date fiind numeroasele condiții ce trebuie satisfăcute. Nu este de mirare că Sylvester avea dubii. Este una dintre cele mai vechi probleme din matematică, dar, dacă există un număr perfect impar, deja se știu despre el destul de multe. Ar trebui să aibă cel puțin 8 divizori primi diferiți, dintre care unul este mai mare de un milion, și ar avea cel puțin 300 de cifre.

Idee de bază
mistica numerelor

11 Numere Fibonacci

În *Codul lui Da Vinci*, scriitorul Dan Brown a făcut ca muzeograful ucis Jacques Saunière să lase în urmă primele opt elemente dintr-o secvență de numere, ca indiciu despre ce i s-a întâmplat. A fost nevoie de talentul de criptograf al lui Sophie Neveu, ca să reordoneze numerele 13, 3, 2, 1, 1, 8 și 5 și să le vadă semnificația. Faceți cunoștință cu cel mai celebru șir de numere din toată matematica.

Șirul Fibonacci de numere întregi este:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, ...

Șirul este atât de cunoscut datorită numeroaselor lui proprietăți surprinzătoare. Caracteristica de bază, de fapt cea care îl și definește, este că fiecare termen reprezintă suma precedenților doi. De exemplu, 8 = 5 + 3, 13 = 8 + 5, ..., 2 584 = 1 597 + 987 etc. Tot ce trebuie să țineți minte este că primele două numere sunt 1 și 1, după care puteți genera pe loc restul șirului. Șirul lui Fibonacci se regăsește în natură în numărul de spirale formate de semințele de floarea-soarelui (de exemplu, 34 într-o direcție, 55 în cealaltă) sau în proporțiile camerelor și clădirilor proiectate de arhitecți. Compozitorii de muzică clasică l-au folosit și ei ca sursă de inspirație și se crede că Suita de dansuri a lui Bartók are legătură cu șirul. În muzica contemporană, pe albumul *This Binary Universe* al lui Brian Transeau (aka BT) există un cântec cu titlul „1 618", ca un omagiu adus raportului dintre numerele Fibonacci, raport despre care vom discuta puțin mai târziu.

ORIGINI

Șirul lui Fibonacci apare în *Liber Abaci*, publicată de Leonardo din Pisa (Fibonacci) în 1202, dar aceste numere erau probabil cunoscute cu mult timp înainte în India. Fibonacci a pus următoarea problemă, a înmulțirii iepurilor:

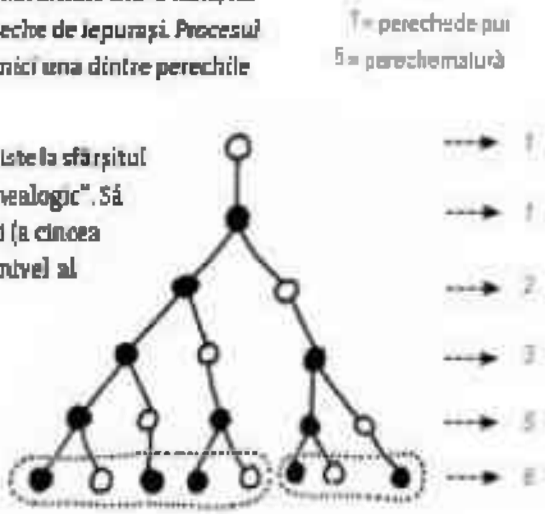
CRONOLOGIE

1202 d.Hr.
Leonardo din Pisa publică *Liber Abaci* și numerele Fibonacci.

1724
Daniel Bernoulli exprimă numerele din șirul lui Fibonacci în termenii proporției de aur.

1923
Bartók compune Suita de dansuri, despre care se crede că a fost inspirată de numerele Fibonacci.

Perechile de iepuri maturi aduc pe lume pui în fiecare lună. La începutul anului există o singură pereche de iepuraşi. Aceştia ajung la maturitate într-o lună, iar la sfârşitul celei de-a doua luni aduc pe lume încă o pereche de iepuraşi. Procesul de maturizare şi de naşteri continuă. Ca prin minune, nici una dintre perechile de iepuri nu moare.



Populaţia de iepuri

Fibonacci voia să ştie câte perechi de iepuri ar urma să existe la sfârşitul anului. Generaţiile pot fi prezentate într-un „arbore genealogic". Să ne uităm la numărul de perechi de la sfârşitul lunii mai (a cincea lună). Vedem că numărul de perechi este 8. La acest nivel al arborelui genealogic, grupul din stânga

● ○ ● ● ○

este un duplicat al întregului şir de deasupra, iar grupul din dreapta

● ○ ●

este un duplicat al şirului de deasupra lui. Aceasta arată că înmulţirea perechilor de iepuri urmează ecuaţia Fibonacci clasică:

numărul după n luni = numărul după $(n-1)$ luni + numărul după $(n-2)$ luni

PROPRIETĂŢI

Să vedem ce se întâmplă dacă adunăm termenii şirului:

$1 + 1 = 2$
$1 + 1 + 2 = 4$
$1 + 1 + 2 + 3 = 7$
$1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$
$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$
$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33$
...

Rezultatele acestor sume vor forma şi ele un şir, pe care îl putem plasa sub şirul original, dar deplasat:

Fibonacci	1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 ...
Sume	2 4 7 12 20 33 54 88 ...

1963

Este înfiinţată *Fibonacci Quarterly*, revistă dedicată teoriei numerelor din şirul lui Fibonacci.

2007

Sculptorul Peter Randall-Page creează sculptura de 70 de tone „Sămânţa", bazată pe şirul lui Fibonacci, pentru Proiectul Eden din Ţara Galilor.

Suma a *n* termeni din șirul lui Fibonacci este cu 1 mai mică decât următorul număr Fibonacci. Dacă vrei să știi rezultatul adunării lui 1+1+2+…+987, trebuie doar să scazi 1 din 2584 și obții 2583. Dacă numerele sunt adunate alternativ, eliminând termeni, cum ar fi 1+2+5+13+34, rezultatul este 55, și el un număr Fibonacci. Dacă este aleasă cealaltă alternativă, adică 1+3+8+21+55, rezultatul este 88, care este un număr Fibonacci minus 1.

Pătratele numerelor din șirul lui Fibonacci sunt și ele interesante. Obținem un nou șir înmulțind fiecare număr Fibonacci cu el însuși și adunându-le.

Fibonacci	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55 …
Pătrate	1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025 …
Suma pătratelor	1	2	6	15	40	104	273	714	1870	4895 …

În acest caz, adunarea tuturor pătratelor până la al *n*-lea membru dă același rezultat ca înmulțirea membrului *n* din șirul Fibonacci original cu următorul. De exemplu:

$$1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 + 169 = 273 = 13 \times 21$$

Numerele Fibonacci apar și atunci când nu te aștepți. Să ne imaginăm că avem un portmoneu conținând un amestec de monede de 1£ și de 2£. Să presupunem că vrem să numărăm modurile în care monedele pot fi scoase din portmoneu ca să obținem o anumită sumă exprimată în lire. În această problemă, ordinea acțiunilor este importantă. Ca să obținem suma de 4£, putem scoate monede din portmoneu în oricare din următoarele moduri: 1+1+1+1; 2+1+1; 1+2+1; 1+1+2 și 2+2. Există, în total, 5 moduri, iar aceasta corespunde celui de-al cincilea număr Fibonacci. Pentru o sumă finală de 20£, există 6 765 de moduri de a scoate monedele de 1£ și de 2£, corespunzător celui de-al 21-lea număr Fibonacci! Aceasta arată puterea unor simple idei matematice.

PROPORȚIA DE AUR

Dacă ne uităm la rapoartele obținute din șirul lui Fibonacci prin împărțirea unui termen la precedentul, descoperim o altă proprietate remarcabilă a numerelor Fibonacci. Să facem asta pentru câțiva termeni: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

$^1/_1$	$^2/_1$	$^3/_2$	$^5/_3$	$^8/_5$	$^{13}/_8$	$^{21}/_{13}$	$^{34}/_{21}$	$^{55}/_{34}$
1 000	2 000	1 500	1 333	1 600	1 625	1 615	1 619	1 617

Destul de repede, rapoartele se apropie de o valoare cunoscută drept secțiunea de aur, sau proporția de aur, un număr celebru în matematică desemnat prin

litera grecească ϕ. Aceasta are locul ei printre cele mai importante constante matematice, cum sunt π și e, și are valoarea exactă

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

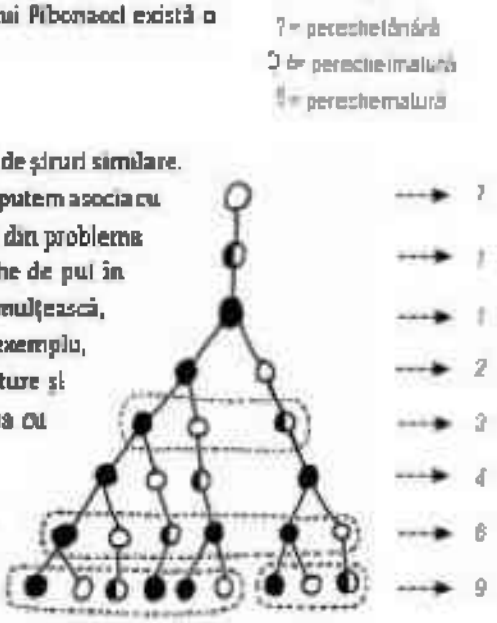
care poate fi aproximată sub forma zecimală 1,618033988... Cu puțină muncă, putem arăta că fiecare număr Fibonacci poate fi scris în funcție de ϕ.

Cu toată bogăția de cunoștințe despre șirul lui Fibonacci, mai sunt încă multe întrebări care așteaptă un răspuns. Primele numere prime din șirul lui Fibonacci sunt 2, 3, 5, 13, 89, 233, 1 597 – dar nu știm dacă în șirul lui Fibonacci există o infinitate de numere prime.

ASEMĂNĂRI DE FAMILIE

Șirul lui Fibonacci ocupă locul de cinste într-o vastă familie de șiruri similare. Un membru spectaculos al acestei familii este unul pe care îl putem asocia cu o problemă a populației de vite. În locul perechilor de iepuri din problema lui Fibonacci, care la fiecare lună se transformă din pereche de pui în pereche matură, iar din luna următoare începe să se înmulțească, există un stadiu intermediar în procesul de maturizare – de exemplu, perechile de vite tinere, care se transformă în perechi imature și apoi în perechi mature, care se pot reproduce. În problema cu vite, șirul este:

1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, ...



Populația de vite

Generațiile „sar" peste o valoare, astfel încât, de exemplu, 41 = 28 + 13 și 60 = 41 + 19. Acest șir are proprietăți similare cu șirul lui Fibonacci. Pentru șirul din problema cu vițele, proporția obținută prin împărțirea unui termen la precedentul său tinde spre o limită desemnată cu litera grecească psi, scrisă ψ, unde

$$\psi = 1{,}46557123187676802665...$$

Aceasta este cunoscută drept „superproporția de aur".

Idee de bază
codul lui Da Vinci descifrat

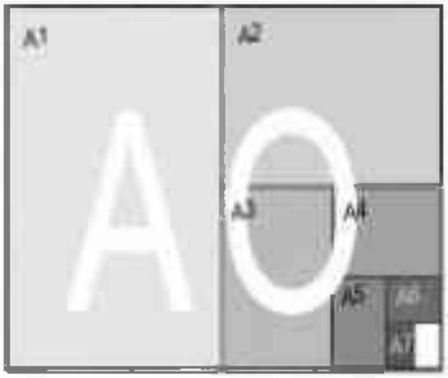
12 Dreptunghiul de aur

Dreptunghiurile sunt peste tot în jurul nostru – clădiri, fotografii, ferestre, uși, chiar și această carte. Dreptunghiurile sunt prezente și în comunitatea artiștilor – Piet Mondrian, Ben Nicholson și alții, care au progresat spre abstractizare, cu toții le-au folosit într-un fel sau altul. Așadar, care este cel mai frumos dintre ele? Să fie subțiraticul „dreptunghi Giacometti” sau unul care este aproape pătrat? Sau este un dreptunghi între aceste extreme?

De fapt, are sens această întrebare? Unii sunt de părere că da și cred că anumite dreptunghiuri sunt mai „ideale” decât altele. Dintre acestea, probabil că dreptunghiul de aur este cel care se bucură de cele mai multe favoruri. Dintre toate dreptunghiurile pe care le-ar putea alege cineva pentru proporțiile lor – pentru că la asta se reduce totul –, dreptunghiul de aur este unul foarte special, care a inspirat artiști, arhitecți și matematicieni. Să ne uităm mai întâi la alte dreptunghiuri.

HÂRTIA MATEMATICĂ

Dacă luăm o coală de hârtie A4, ale cărei dimensiuni sunt 210 mm pe latura scurtă și 297 mm pe latura lungă, raportul dintre lungime și lățime va fi $^{297}/_{210}$, care este aproximativ 1,4142. Pentru orice hârtie de dimensiune conformă codului internațional A, dacă latura scurtă este b, atunci latura lungă va fi întotdeauna 1,4142 x b. Astfel, pentru A4, b = 210 mm, în timp ce pentru A5, b = 148 mm. Sistemul formulelor A folosit pentru dimensiunile colilor de hârtie mai are o proprietate foarte apreciată, una care nu apare la colile de dimensiuni arbitrare. O coală de orice dimensiune A îndoită la mijloc formează două dreptunghiuri care sunt în proporție directă cu dreptunghiul mare. Adică sunt două versiuni mai mici ale aceluiași dreptunghi.



Astfel, o coală A4 îndoită în două generează două dreptunghiuri A5. La fel, o coală A5 îndoită în două generează două coli A6. În cealaltă direcție, o coală A3 este

CRONOLOGIE

cca 300 î.Hr	1202 d.Hr.	1509
Euclid vorbește, în *Elemente*, despre raport „mediu” și „extrem”	Leonardo din Pisa publică *Liber Abaci*	Pacioli publică *Proporția divină*

formată din două coli A4. Cu cât este mai mic numărul ce însoțește litera A, cu atât este mai mare coala de hârtie. De unde am știut că numărul 1,4142 ne va face acest serviciu? Să îndoim un dreptunghi, dar de data aceasta unul căruia nu îi cunoaștem lungimea. Considerăm lățimea dreptunghiului egală cu 1 și lungimea o notăm cu x, atunci raportul dintre lungime și lățime este $x/1$. Dacă acum îndoim dreptunghiul pe mijloc, raportul lungime-lățime al dreptunghiului mai mic este $1 \div x/2$, care este același cu $2/x$. Ideea sistemului colilor A este că ambele rapoarte trebuie să corespundă aceleiași proporții, așadar ajungem la ecuația $x/1 = 2/x$ sau $x^2 = 2$. Valoarea lui x este așadar $\sqrt{2}$, care este aproximativ 1,4142.

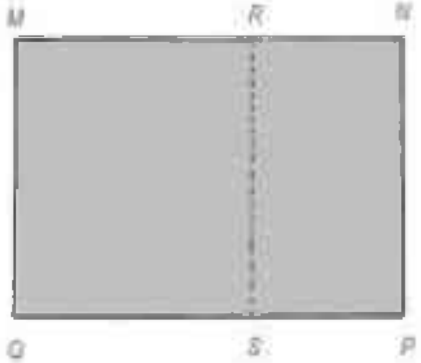
AURUL MATEMATIC

Dreptunghiul de aur este diferit, dar *foarte puțin* diferit. De această dată, dreptunghiul este îndoit după linia RS din diagramă, astfel încât punctele *MRSQ* să formeze colțurile unui *pătrat*.

Proprietatea esențială a dreptunghiului de aur este că dreptunghiul rămas, *RNPS*, este proporțional cu dreptunghiul mare – ceea ce rămâne trebuie să fie o replică la scară redusă a dreptunghiului mare.

La fel ca înainte, vom spune că lățimea *MQ* = *MR* a dreptunghiului mare este o unitate de lungime, iar lungimea laturii mai lungi *MN* o vom nota cu *x*. Raportul dintre lungime și lățime este din nou $x/1$. De data aceasta, lățimea dreptunghiului mai mic *RNPS* este *MN*–*MR*, adică *x*–1, astfel încât raportul lungime/lățime al acestui dreptunghi este $1/(x-1)$. Punând semnul egal între cele două rapoarte, obținem ecuația

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$



care, prin înmulțire pe diagonală, dă $x(x-1) = 1$ sau $x^2 = x + 1$. O soluție aproximativă este 1,618. Este foarte ușor să verificăm. Luați un calculator de buzunar și înmulțiți-l pe 1,618 cu el însuși. Obțineți 2,618, ceea ce este același lucru cu $x+1=2{,}618$. Acest număr este faimoasa proporție de aur și este desemnat prin litera grecească phi, ϕ. Definiția și aproximarea sunt date de

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398874989484820...$$

Acest număr are legătură cu șirul lui Fibonacci și cu problema iepurilor (vezi pp. 44-45).

1876

Fechner scrie despre experimente psihologice pentru determinarea celui mai „estetic" dreptunghi.

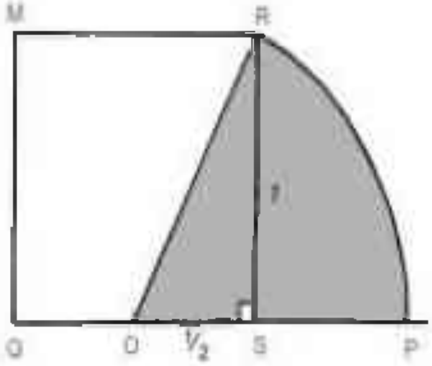
1975

Organizația Internațională pentru Standardizare (ISO) definește dimensiunile A pentru hârtie.

În căutarea aurului

Acum să vedem dacă putem construi un dreptunghi de aur. Începem cu pătratul nostru *MQSR*, ale cărui laturi sunt egale cu 1, și marcăm jumătatea laturii *QS* cu *O*. Lungimea $OS = \frac{1}{2}$ și, astfel, aplicând teorema lui Pitagora [vezi p. 85] în triunghiul *ORS*,

$$OR = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



Cu ajutorul unui compas centrat în *O*, desenăm arcul *RP* și vom descoperi că $OP = OR = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Vom avea, până la urmă,

$$QP = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \phi$$

adică exact ce căutam: „proporția de aur", sau latura dreptunghiului de aur.

Istoric

Se spun multe despre proporția de aur ϕ. Odată ce sunt cunoscute atrăgătoarele ei proprietăți matematice, este posibil să fie văzută în locuri neașteptate, chiar în locuri unde nu există. Mai grav decât aceasta este pericolul de a pretinde că proporția de aur a existat înaintea creației – că muzicienii, arhitecții și artiștii o aveau în minte la momentul creației. Se poate ajunge la o adevărată manie. Trecerea de la numere la generalizări, fără altă dovadă, este un pas periculos.

Să luăm cazul Parthenonului din Atena. La vremea construcției lui, proporția de aur era cu siguranță cunoscută, dar asta nu înseamnă că arhitectura Parthenonului este bazată pe ea. Cert este că, la fațada Parthenonului, raportul dintre lățime și înălțime (inclusiv frontonul triunghiular) este 1,74, destul de apropiat de 1,618, dar este suficient pentru a invoca proporția de aur ca motivație? Unii susțin că frontonul nu ar trebui luat în calcul, iar dacă se face asta, proporția dintre lățime și înălțime este, de fapt, numărul întreg 3.

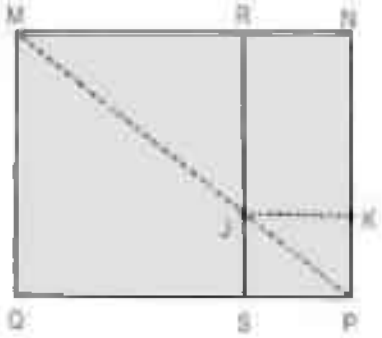
În cartea *De divina proportione*, publicată în 1509, Luca Pacioli a „descoperit" conexiuni între caracteristicile lui Dumnezeu și proprietățile proporției determinate prin ϕ. El a botezat-o „proporția divină". Pacioli a fost un călugăr franciscan care a scris cărți importante despre matematică. Unii îl consideră chiar „părintele contabilității" deoarece a popularizat metoda dublei intrări, folosită de negustorii venețieni. Cealaltă justificare a aspirației lui la faimă este că l-a învățat matematică pe Leonardo da Vinci. În Renaștere, proporția de aur a ajuns la un statut aproape mistic – astronomul Johannes Kepler a descris-o ca „un prețios giuvaier" matematic. Mai târziu, Gustav Fechner, un german specializat în psihologie experimentală, a făcut mii de măsurători

ale unor forme dreptunghiulare (cărți de joc, cărți, ferestre) și a descoperit că proporția laturilor care apare cel mai frecvent este apropiată de φ.

Le Corbusier a fost fascinat de dreptunghi ca element central în designul arhitectural și, în particular, de proporția de aur. El a dat mare importanță armoniei și ordinii, iar pe acestea le-a găsit în matematică. Una dintre preocupările sale era sistemul „modulator", o teorie a proporțiilor. Aceasta era, de fapt, o modalitate de a genera șiruri de dreptunghiuri de aur, forme pe care le utiliza în planurile lui. Le Corbusier a fost inspirat de Leonardo da Vinci, care, la rândul lui, a luat atent notițe de la arhitectul roman Vitruvius, celebru prin proporțiile găsite la figura umană.

ALTE FORME

Există și un „super-dreptunghi de aur", a cărui construcție seamănă cu felul în care este construit dreptunghiul de aur.



Iată cum creăm super-dreptunghiul de aur MQPN. La fel ca mai înainte, MQSR este un pătrat a cărui latură are lungimea 1. Trasăm diagonala MP și marcăm intersecția cu RS ca fiind punctul J. Apoi trasăm o linie JK paralelă cu RN, cu K pe NP. Vom spune că lungimea RJ este y și lungimea MN este x. Pentru orice dreptunghi, $^{RJ}/_{MR}$ = $^{NP}/_{MN}$ (pentru că triunghiurile MRJ și MNP sunt asemenea), deci $^{y}/_{1}$ = $^{1}/_{x}$, ceea ce înseamnă că $x \times y = 1$ și spunem că x și y sunt fiecare „reciprocul" celuilalt. Obținem super-dreptunghiul trasând dreptunghiul RJKN proporțional cu dreptunghiul original MQPN, adică $^{y}/_{(x-1)}$ = $^{x}/_{1}$. Folosind faptul că $xy = 1$, putem trage concluzia că lungimea super-dreptunghiului x este găsită prin rezolvarea ecuației „cubice" $x^3 = x^2 + 1$, care seamănă clar cu ecuația $x^2 = x + 1$ (ecuația care determină dreptunghiul de aur). Ecuația cubică are o soluție reală pozitivă ψ (înlocuind x cu simbolul standard ψ), a cărui valoare este

$$\psi = 1{,}46557123187676802665\ldots$$

număr asociat cu șirul din problema vițelor (vezi p. 47). Dacă dreptunghiul de aur poate fi construit cu o riglă și un compas, super-dreptunghiul de aur nu poate fi construit în acest mod.

Ideea de bază
proporții divine

13 Triunghiul lui Pascal

Numărul 1 este interesant, dar ce putem spune despre 11? Este interesant și el, la fel ca 11 × 11 = 121, 11 × 11 × 11 = 1331 și 11 × 11 × 11 × 11 = 14 641. Dacă le punem pe hârtie, obținem

11
121
1331
14 641

Acestea sunt primele linii din triunghiul lui Pascal. Dar cum îl găsim?

După ce introducem și $11^0 = 1$, din motive justificate, primul lucru pe care îl facem este să eliminăm punctele și să introducem spații între cifre. Astfel, 14 641 devine 1 4 6 4 1.

Triunghiul lui Pascal este celebru în matematică pentru simetria lui și pentru relațiile pe care le ascunde. În 1653, Blaise Pascal a remarcat că nu era posibil să le acopere pe toate într-o singură lucrare. Numeroasele conexiuni dintre triunghiul lui Pascal și alte ramuri ale matematicii l-au transformat într-un obiect matematic venerabil, ale cărui origini sunt și mai vechi. De fapt, Pascal nu a inventat triunghiul care îi poartă numele – acesta le era cunoscut savanților chinezi din secolul al XIII-lea.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Triunghiul lui Pascal

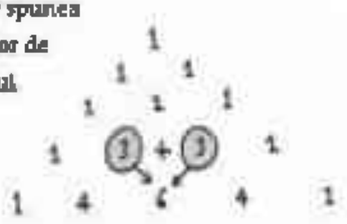
Triunghiul lui Pascal se generează de la vârf. Începem cu 1 și plasăm alți doi de 1 de o parte și de alta, pe următorul rând din jos. Ca să construim rândurile următoare, plasăm cifre de 1 la capetele fiecărui rând, iar numerele intermediare le obținem prin însumarea numerelor aflate imediat deasupra. Ca să obținem 6 din rândul al cincilea, de exemplu, am

CRONOLOGIE

cca 500 î.Hr.
Există dovezi parțiale în sanscrită ale triunghiului lui Pascal.

cca 1070 d.Hr.
Omar Khayyam descoperă triunghiul, care în unele țări îi poartă numele.

adunat 3 + 3 din rândul de deasupra. Matematicianul englez G.H. Hardy spunea că „matematicianul, la fel ca un pictor sau un poet, este un constructor de structuri", iar triunghiul lui Pascal are astfel de structuri în interiorul lui.



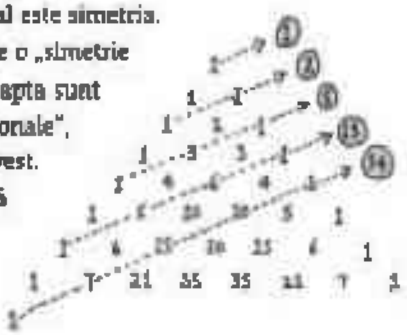
Legături cu algebra. Triunghiul lui Pascal se bazează pe matematică reală. Să calculăm, de exemplu, $(1 + x) \times (1 + x) \times (1 + x) = (1 + x)^3$. Rezultatul este $1 + 3x + 3x^2 + x^3$. Priviți cu atenție și veți vedea că numerele din fața simbolurilor din această expresie sunt numerele din rândul corespunzător al triunghiului lui Pascal. Schema urmată este:

$(1 + x)^1$	1
$(1 + x)^2$	1 1
$(1 + x)^3$	1 2 1
$(1 + x)^4$	1 3 3 1
$(1 + x)^5$	1 4 6 4 1
$(1 + x)^6$	1 5 10 10 5 1

Dacă adunăm numerele din oricare rând al triunghiului lui Pascal, obținem întotdeauna o putere a lui 2. De exemplu, în al cincilea rând în jos, $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$. Rezultatul poate fi obținut din coloana din stânga, corespunzător rândului de deasupra, unde $x = 1$.

PROPRIETĂȚI

Prima și cea mai evidentă proprietate a triunghiului lui Pascal este simetria. Dacă trasăm o linie verticală în jos prin mijloc, triunghiul are o „simetrie în oglindă" – partea din stânga liniei verticale și cea din dreapta sunt identice. Aceasta ne permite să vorbim direct despre „diagonale", pentru că o diagonală nord-est va fi la fel cu diagonala nord-vest. Sub diagonala formată din cifrele 1 avem diagonala formată din numerele naturale 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Sub aceasta sunt numerele triunghiulare 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... (numerele care reprezentate prin puncte formează triunghiuri). Cu o diagonală mai jos avem numerele tetraedrice 1, 4, 10, 20, 35, 56,... Aceste numere corespund tetraedrelor („triunghiuri tridimensionale" sau, dacă preferați, numărul de ghiulele de tun care pot fi așezate pe baze triunghiulare din ce în ce mai mari). Ce se întâmplă pe semi-diagonale?



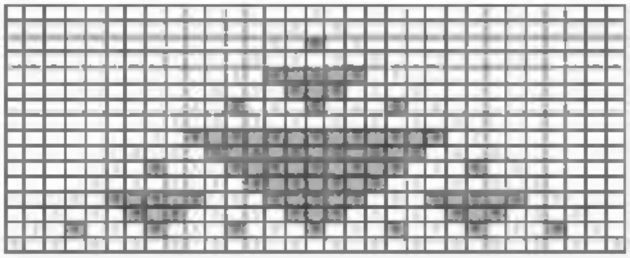
Semi-diagonalele în triunghiul lui Pascal

1303
Zhu Shijie definește triunghiul lui și arată cum trebuie însumate anumite șiruri.

1664
Lucrarea lui Pascal despre proprietățile triunghiului este publicată postum.

1714
Leibniz tratează subiectul triunghiului armonic.

Dacă adunăm numerele de pe liniile ce traversează triunghiul (şi care nu sunt nici rânduri, nici diagonale în sensul propriu al cuvântului), obţinem şirul 1, 2, 5, 13, 34, ... Fiecare număr este de trei ori precedentul din care se scade numărul de dinaintea acestuia. De exemplu, $34 = 3 \times 13 - 5$. Pe baza acestei scheme, următorul număr din şir va fi $3 \times 34 - 13 = 89$. Am trecut cu vederea semi-diagonalele alternative, care încep cu 1, $1 + 2 = 3$, dar acestea ne vor da şirul 1, 3, 8, 21, 55, ... şi acestea sunt generate de aceeaşi regulă „de trei ori minus 1". Aşadar, putem genera următorul număr din şir, ca $3 \times 55 - 21 = 144$. Dar asta nu este tot. Dacă întrepătrundem aceste două şiruri de semi-diagonale, obţinem numerele Fibonacci:

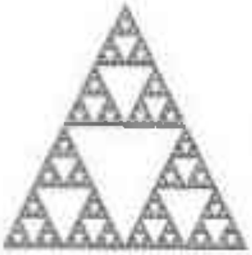


Numere pare şi impare în triunghiul lui Pascal

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

COMBINAŢIILE LUI PASCAL

Numerele lui Pascal răspund la unele probleme legate de numărare. Să presupunem că avem, într-o cameră, 7 oameni. Să îi numim **Alison**, **Catherine**, **Emma**, **Gary**, **John**, **Matthew** şi **Thomas**. Câte modalităţi există de a alege, dintre ei, grupuri diferite de câte 3 persoane? Una ar fi **A**, **C**, **E**; o alta ar fi **A**, **C**, **T**. Matematicienii găsesc util să scrie *C(n,r)* pentru numărul aflat pe rândul n, în poziţia r (numărând de la *r = 0*) din triunghiul lui Pascal. Răspunsul la întrebarea noastră este *C(7,3)*. Numărul de pe al şaptelea rând al triunghiului, în poziţia a treia, este 35. Dacă am ales un grup de 3 oameni, automat avem un alt grup de 4 oameni, cei „nealeşi". Aceasta înseamnă că şi *C(7,4)*=35. În general, *C(n,r)*=*C(n, n-r)*, ceea ce decurge din simetria în oglindă a triunghiului lui Pascal.



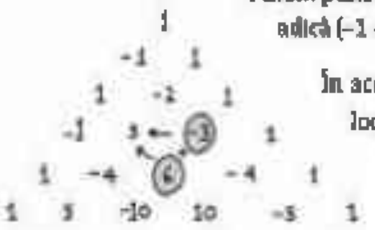
Covorul lui Sierpiński

0 ŞI 1

În triunghiul lui Pascal, vedem că numerele interioare formează un tipar anume depinzând de faptul dacă sunt pare şi impare. Dacă substituim cu 1 toate numerele impare şi cu 0 toate numerele pare, obţinem o reprezentare care urmează acelaşi tipar ca remarcabilul fractal cunoscut drept covorul lui Sierpiński (vezi p. 102).

ADĂUGAREA SEMNELOR

Putem pune pe hârtie triunghiul lui Pascal care corespunde puterilor lui $(-1 + x)$, adică $(-1 + x)^n$.



Adăugarea semnelor

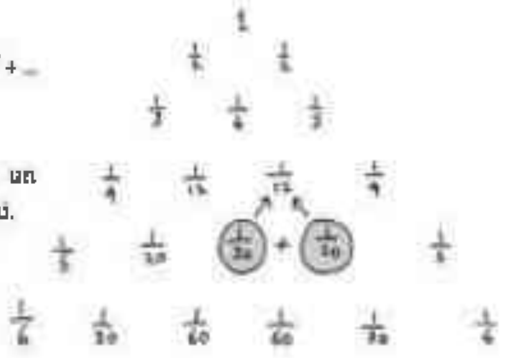
În acest caz, triunghiul nu este perfect simetric faţă de verticală, iar în locul rândurilor pe care se adună puterile lui 2 se adună 0. Totuşi, în acest caz, diagonalele sunt cele care interesează. Pe diagonala sud-vestică 1, -1, 1, -1, 1, -1,... se află coeficienţii expansiunii:

$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + \ldots$$

În timp ce termenii de pe următoarea diagonală sunt coeficienții expansiunii

$$(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - 8x^7 + \ldots$$

TRIUNGHIUL ARMONIC AL LUI LEIBNIZ



Triunghiul armonic al lui Leibniz

Savantul german Gottfried Leibniz a descoperit un remarcabil set de numere în forma unui triunghi. Numerele Leibniz au o relație de simetrie față de linia verticală. Dar, spre deosebire de triunghiul lui Pascal, numărul dintr-un rând este obținut prin însumarea celor două numere de sub el. De exemplu, $\frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{12}$. Pentru a construi acest triunghi, putem progresa din vârf și să ne deplasăm de la stânga la dreapta prin scădere: știm $\frac{1}{12}$ și $\frac{1}{30}$, așadar $\frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{1}{20}$, numărul alăturat lui $\frac{1}{30}$. Poate că ați observat că diagonala exterioară este faimoasa serie armonică:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$$

dar a doua diagonală este ceea ce este cunoscut drept seria Leibniz

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)}$$

care, printr-o manipulare iscusită, se dovedește a fi egală cu $\frac{n}{(n+1)}$. La fel cum am făcut înainte, putem scrie aceste numere Leibniz ca $B(n,r)$, corespunzător numărului n din rândul r. Ele sunt legate de numerele Pascal obișnuite $C(n,r)$ prin formula:

$$B(n,r) \times C(n,r) = \frac{1}{n+1}$$

Cum s-ar spune, „osul genunchiului este legat de femur, iar femurul este legat de osul șoldului". La fel stau lucrurile cu triunghiul lui Pascal și legăturile lui strânse cu atât de multe domenii ale matematicii – geometria modernă, combinatorică și algebră, ca să numim doar trei. Mai mult, este tipic pentru ceea ce înseamnă matematica – o căutare constantă a tiparului și a armoniei, care ne ajută să înțelegem subiectul însuși.

Idee de bază
fântâna numerelor

14 Algebra

Algebra ne oferă o cale distinctă de rezolvare a problemelor, o metodă deductivă cu o particularitate. Particularitatea este „gândirea inversă". Să ne gândim, de exemplu, că luăm numărul 25, îi adăugăm 17 și obținem 42. Aceasta este gândire directă. Ni se dau două numere și doar le adunăm. Să presupunem, în schimb, că ni se dă rezultatul, 42, și ni se pune o întrebare diferită. Trebuie să aflăm numărul care, adunat cu 25, dă 42. Aici intră în joc gândirea inversă. Vrem valoarea lui x, care este soluția ecuației 25 + x = 42, și scădem 25 din 42 ca să o obținem.

Elevilor li se dau dintotdeauna probleme menite să fie rezolvate cu ajutorul algebrei.

Nepoata mea Michelle are 6 ani, iar eu am 40.
Când voi fi de trei ori mai vârstnic decât ea?

Am putea găsi răspunsul prin încercare și eroare, dar algebra este mai rapidă. Peste x ani, Michelle va avea 6 + x ani, iar eu voi avea 40 + x. Vârsta mea va fi de trei ori mai mare decât a ei atunci când

$$3 \times (6 + x) = 40 + x$$

Făcând înmulțirea din partea stângă a ecuației, obținem 18 + 3x = 40 + x, iar dacă mutăm toți termenii cu x ai ecuației într-o parte și numerele în cealaltă, găsim că 2x = 22, ceea ce înseamnă că x = 11. Când eu voi avea 51 de ani, Michelle va avea 17 ani. Magie, nu alta!
Dar, dacă vrem să aflăm când voi avea de două ori vârsta ei? Putem folosi aceeași abordare, rezolvând de data aceasta ecuația

$$2 \times (6 + x) = 40 + x$$

și obținem x = 28. Ea va avea 34 de ani când eu voi avea 68. Toate ecuațiile de mai sus sunt de tipul cel mai simplu – ele se numesc ecuații „liniare". Nu au termeni de genul x^2 sau x^3, care fac ecuațiile mai greu de rezolvat. Ecuațiile cu x^2 se numesc

CRONOLOGIE

1950 î.Hr.	250 d.Hr.	825
Babilonienii lucrează cu ecuații pătratice.	Diophantus din Alexandria publică *Arithmetica*.	Al-Khwarizmi dă matematicii cuvântul „algebră", derivat din al-jabr.

ecuații pătratice (de gradul 2), iar cele cu termeni x^3 se numesc ecuații cubice (de gradul 3). În trecut, x^2 era reprezentat ca un pătrat și, deoarece pătratul are patru laturi, se folosea termenul „cuadratic"; x^3 era reprezentat printr-un cub.

Matematica a suferit o schimbare majoră când a trecut de la știința aritmeticii la știința simbolurilor algebrei. Trecerea de la numere la simboluri este un salt mental, dar merită efortul.

ORIGINI

Algebra a fost un element important în activitatea savanților islamici din secolul al IX-lea. Al-Khwarizmi a scris un manual de matematică în care apărea cuvântul arab al-jabr. Tratând probleme practice în termenii ecuațiilor liniare și pătratice, „știința ecuațiilor" a lui al-Khwarizmi ne-a dat cuvântul „algebră". Și mai târziu, Omar Khayyam a devenit celebru pentru că a scris *Rubaiatele* și nemuritoarele versuri (în traducere)

Un urcior cu vin, o pâine / Și tu alături de mine, cântând în pustie,

dar în 1070, la vârsta de 20 de ani, el a scris o carte de algebră în care a studiat rezolvarea ecuațiilor cubice.

Filiera italiană

Teoria ecuațiilor cubice a fost finalizată în timpul Renașterii. Din păcate, a inclus și un episod care nu face deloc cinste matematicii. Scipione Del Ferro a găsit soluțiile unor forme speciale de ecuații cubice și, auzind de asta, un profesor din Veneția, Niccolò Fontana – zis „Tartaglia" sau „Bâlbâitul" –, și-a publicat propriile rezultate despre algebră, dar și-a păstrat metodele secrete. Girolamo Cardano din Milano l-a convins pe Tartaglia să-i expună metoda, dar acesta i-a cerut să jure că va păstra secretul. Metoda a ieșit însă la iveală, iar între cei doi a izbucnit o ceartă, când Tartaglia a descoperit că rezultatele lui fuseseră publicate în cartea lui Cardano *Ars Magna*, din 1545.

Măreața lucrare despre matematică a lui Girolamo Cardano, publicată în 1545, a devenit un reper în teoria ecuațiilor, deoarece conținea o mulțime de rezultate privind ecuațiile cubice și ecuațiile de gradul 4 (cuadratice) – cele în care apar termeni de tipul x^4. Această cercetare asiduă a arătat că ecuațiile pătratice, cubice și cuadratice pot fi rezolvate, toate, prin formule care implică doar operațiile $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt[q]{\ }$ (unde ultima operațiune înseamnă rădăcina de ordin q). De exemplu, ecuația pătratică $ax^2 + bx + c = 0$ poate fi rezolvată cu ajutorul formulei:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1591 François Viète scrie un text matematic în care folosește litere pentru cunoscute și necunoscute.

anii 1920 Emmy Noether publică lucrări care duc la dezvoltarea algebrei abstracte moderne.

1930 Bartel van der Waerden publică faimoasa *Algebră modernă*.

Dacă vreți să rezolvați ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$, tot ce trebuie să faceți este să înlocuiți valorile $a = 1$, $b = -3$ și $c = 2$ în formulă.

Formulele pentru rezolvarea ecuațiilor de gradele 3 și 4 sunt lungi și întortocheate, dar, cu siguranță, există. Ceea ce i-a nedumerit pe matematicieni a fost faptul că nu au putut găsi o formulă general aplicabilă ecuațiilor care conțin x^5, ecuațiile de gradul 5. Ce era atât de deosebit cu puterea a cincea?

În 1826, matematicianul Niels Abel a găsit un răspuns remarcabil la această enigmă a ecuației de gradul 5. De fapt, el a dovedit conceptul negativ, aproape întotdeauna o sarcină mai dificilă decât să dovedești că un anume lucru poate fi făcut. Abel a dovedit că nu poate exista o formulă pentru rezolvarea tuturor ecuațiilor de gradul 5 și a ajuns la concluzia că orice căutare ulterioară a unei astfel de formule ar fi zadarnică. El a convins elita matematicienilor, dar a fost nevoie de timp pentru ca vestea să se răspândească în întreaga lume a matematicii. Unii matematicieni au refuzat să accepte rezultatul și, multă vreme în secolul al XIX-lea, oamenii încă au publicat lucrări în care pretindeau că găsiseră formula inexistentă.

LUMEA MODERNĂ

Vreme de 500 de ani, algebra a însemnat „teoria ecuațiilor", dar, în secolul al XIX-lea, s-a produs o revoluție. Oamenii au înțeles că simbolurile din algebră ar putea reprezenta mai mult decât simple numere – ele ar putea reprezenta „propoziții" și astfel algebra poate fi pusă în legătură cu studiul logicii. Ele ar putea chiar reprezenta obiecte în mai multe dimensiuni, cum sunt cele din algebra matricilor (vezi p. 156). Și, după cum bănuiau de multă vreme cei din afara lumii matematicii, ele ar putea chiar să nu reprezinte nimic și să fie doar niște simboluri mutate de colo-colo, după anumite reguli (formale).

Un eveniment important pentru algebra modernă s-a petrecut în 1843, când irlandezul William Rowan Hamilton a descoperit cuaternionii. Hamilton căuta un sistem de simboluri prin care să extindă numerele complexe bidimensionale la mai multe dimensiuni. Mulți ani a făcut încercări cu simboluri tridimensionale, dar nu a rezultat un sistem mulțumitor. În fiecare dimineață, când cobora la micul dejun, fiii lui îl întrebau: „Tată, ai reușit să înmulțești tripleții?", iar el era nevoit să le răspundă că putea doar să îi adune și să îi scadă. Succesul a venit pe neașteptate. Căutarea tridimensională era o fundătură – ar fi trebuit să caute simboluri cvadridimensionale. Ideea i-a venit într-o străfulgerare, în timp ce se plimba cu soția de-a lungul Royal Canal, la Dublin. A fost extaziat de senzația descoperirii. Fără ezitare, vandalul de 38 de ani, astronom regal al Irlandei și cavaler al Regatului, a gravat relațiile de definiție în piatra podului Brougham – un loc marcat astăzi printr-o placă. Cu datele bine întipărite în minte, Hamilton

a făcut din acest subiect o obsesie. An după an, el a ținut prelegeri pe această temă și a publicat două cărți voluminoase despre „visul mistic și plutind spre apus al celor patru".

O particularitate a cuaternionilor este că, atunci când sunt înmulțiți, ordinea în care se face operațiunea are o importanță vitală, contrar regulilor aritmetici obișnuite. În 1844, matematicianul și lingvistul german Hermann Grassmann a publicat un alt sistem algebric, cu mai puțină încărcătură dramatică. Ignorat la vremea respectivă, s-a dovedit a fi mai de anvergură. Astăzi, și cuaternionii, și algebra lui Grassmann au aplicații în geometrie, fizică și grafica pe computer.

ABSTRACTUL

În secolul XX, paradigma dominantă a algebrei a fost metoda axiomatică. Aceasta a fost folosită de Euclid ca bază pentru geometrie, dar nu a fost aplicată în algebră decât relativ recent.

Emmy Noether a fost promotoarea metodei abstracte. În această algebră modernă, ideea fundamentală este legată de studiul structurii, în care exemplele individuale sunt subordonate noțiunii generale abstracte. Dacă exemplele individuale au aceeași structură, dar notații diferite, ele se numesc izomorfe.

Structura algebrică fundamentală este grupul, iar acesta este definit de o listă de axiome (vezi p. 155). Există structuri cu mai puține axiome (cum sunt grupoizii, semigrupurile și cvasigrupurile) și structuri cu mai multe axiome (ca inelele, inelele de diviziune, domeniile integrale și câmpurile). Toate aceste cuvinte noi au fost importate în matematică la începutul secolului XX, pe măsură ce algebra s-a transformat în știința abstractă cunoscută drept „algebră modernă".

Idee de bază
în căutarea necunoscutei

15 Algoritmul lui Euclid

Al-Khwarizmi ne-a lăsat cuvântul „algebră", dar cartea lui despre aritmetică, din secolul al IX-lea, ne-a oferit și cuvântul „algoritm". Este un concept util în matematică și în informatică deopotrivă, însă ce este el, de fapt? Dacă putem să răspundem la această întrebare, suntem pe cale să înțelegem algoritmul lui Euclid pentru găsirea celui mai mare divizor comun.

În primul rând, un algoritm înseamnă rutină. Este o listă de instrucțiuni de tipul „faci asta și apoi faci aia". Putem vedea de ce algoritmii sunt pe placul computerelor, care sunt foarte bune la urmat instrucțiunile și nu se abat niciodată de la calea trasată. Unii matematicieni cred că algoritmii sunt plictisitori, pentru că sunt repetitivi, dar să scrii un algoritm și apoi să îl transpui în sute de linii de cod mașină, care conțin instrucțiuni matematice, nu este o treabă ușoară. Există un risc considerabil ca totul să meargă cât se poate de prost. Scrierea unui algoritm este o provocare creativă. Deseori există câteva metode disponibile pentru a face același lucru și trebuie aleasă cea mai bună. Unii algoritmi s-ar putea să nu fie potriviți obiectivului urmărit, alții ar putea fi eliminați pentru că sunt prea complicați. Unii s-ar putea să fie rapizi, dar să dea un răspuns eronat. Într-un fel, seamănă cu gătitul. Există probabil sute de rețete (algoritmi) pentru pregătirea curcanului umplut. Cu siguranță că nu vrem un algoritm slab, când avem de pregătit o masă festivă. Așadar, avem ingredientele și avem instrucțiunile. Începutul unei rețete (prescurtate) ar putea arăta cam așa:

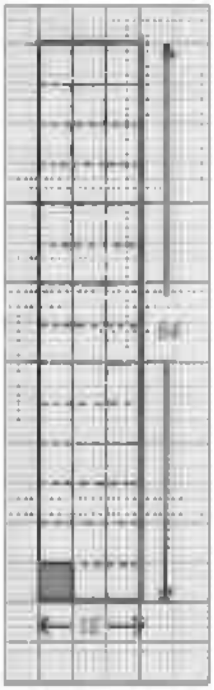
- introduceți umplutura în cavitatea curcanului
- ungeți pe exterior curcanul cu unt
- asezonați cu sare, piper și boia
- dați la cuptor, la 175°C, timp de $3\frac{1}{2}$ ore
- lăsați curcanul să se „odihnească" $\frac{1}{2}$ oră

CRONOLOGIE

cca 300 î.Hr.	cca 300 d.Hr.	810
Algoritmul lui Euclid este publicat în Cartea 7 a *Elementelor*.	Sun Tzu descoperă teorema chinezească a resturilor.	Al-Khwarizmi dă matematicii cuvântul „algoritm".

Tot ce trebuie să facem este să derulăm algoritmul în pași secvențiali, unul după altul. Singurul lucru care lipsește din această rețetă, de obicei prezent într-un algoritm matematic, este o buclă, un instrument pentru partea de recursivitate. Din fericire, nu trebuie să coacem curcanul mai mult de o singură dată.

Și în matematică avem ingrediente – acestea sunt numerele. Algoritmul lui Euclid este destinat calculării celui mai mare divizor comun (scris CMMDC). CMMDC pentru două numere este cel mai mare număr la care amândouă se împart exact. Pentru exemplul nostru, vom alege ca „ingrediente" numerele 18 și 84.

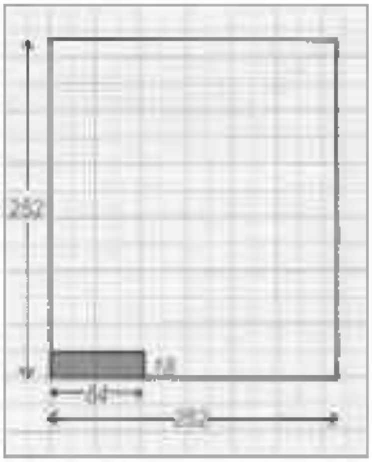


Acoperirea dreptunghiului cu gresie 6 * 6

CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN

În exemplul nostru, CMMDC este cel mai mare număr la care se împart exact și 18, și 84. Numărul 2 este și divizor al lui 18, și al lui 84, dar la fel este și 3. Numărul 6 divide și el amândouă numerele. Există vreun număr și mai mare care să le dividă? Am putea încerca 9 sau 18. Verificăm însă imediat că 84 nu se împarte exact la aceste numere, așa că 6 este cel mai mare număr care le divide pe amândouă. Putem trage concluzia că 6 este CMMDC al lui 18 și 84, scriind aceasta ca CMMDC (18, 84) = 6.

CMMDC poate fi interpretat printr-o analogie cu gresia din bucătărie. Este latura celui mai mare pătrat de gresie care va acoperi perfect o podea de lățime 18 și lungime 84, fără să fie permisă tăierea plăcilor. În acest caz, vom avea nevoie de gresie în pătrate 6 × 6.



Acoperirea pătratului cu gresie 18 * 84

Cel mai mare divizor comun este cunoscut și drept „cel mai mare factor comun" sau „cel mai înalt divizor comun". Există și conceptul înrudit de cel mai mare multiplu comun (CMMMC). CMMMC al lui 18 și 84 este cel mai mic număr divizibil și cu 18, și cu 84. Legătura dintre CMMMC și CMMDC este evidențiată de faptul că CMMMC al două numere înmulțit cu CMMDC este egal cu produsul numerelor înseși. În cazul nostru, CMMMC(18, 84) = 252 și este ușor de verificat că 6 × 252 = 1512 = 18 × 84.

1202

Fibonacci publică o lucrare despre congruențe în *Liber Abaci*.

anii 1970

Teorema chinezească a resturilor este aplicată în criptarea mesajelor.

Geometric, CMMMC este latura celui mai mic pătrat care poate fi acoperit cu dreptunghiuri 18 × 84. Deoarece CMMMC(a, b) = ab ÷ CMMDC (a, b), ne vom concentra pe găsirea lui CMMDC. Am stabilit deja că CMMDC(18, 84) = 6 și, ca să facem asta, trebuia să știm divizorii lui 18 și 84.

Ca să recapitulăm, mai întâi am descompus cele două numere în factorii lor: 18 = 2 × 3 × 3 și 84 = 2 × 2 × 3 × 7. Apoi le comparăm și găsim că 2 este comun ambelor și este cea mai mare putere a lui 2 la care se împart amândouă. De asemenea, 3 este comun și este cea mai mare putere la care se împart amândouă, dar, chiar dacă 7 îl divide pe 84, nu îl divide și pe 18, așa că nu poate intra ca factor în CMMDC. Am ajuns la concluzia: 2 × 3 = 6 este cel mai mare număr care le divide pe amândouă. Poate fi evitată această jonglerie cu factori? Imaginați-vă calculele dacă am căuta CMMDC(17 640, 54 054). Mai întâi ar trebui să descompunem aceste numere în factori, iar acesta ar fi doar începutul. Trebuie să existe o cale mai ușoară.

ALGORITMUL

Există o cale mai bună. Algoritmul lui Euclid este oferit în *Elemente*, Cartea 7, Propoziția 2 (în traducere): „Date fiind două numere care nu sunt prime unul față de celălalt, să le găsim cea mai mare măsură comună".

Algoritmul furnizat de Euclid este teribil de eficient și înlocuiește efectiv efortul găsirii factorilor printr-o simplă scădere. Să vedem cum funcționează.

Scopul este să calculăm d = CMMDC(18, 84). Începem prin a-l împărți pe 84 la 18. Nu se împarte exact, ci dă rezultatul 4, cu rest 12:

$$84 = 4 \times 18 + 12$$

Cum d trebuie să le dividă și pe 84, și pe 18, el trebuie să dividă și restul 12. Așadar, d = CMMDC(12, 18). Acum putem repeta procesul și îl împărțim pe 18 la 12:

$$18 = 1 \times 12 + 6$$

și obținem restul 6, așadar d = CMMDC(6, 12). Împărțindu-l pe 12 la 6 avem restul 0, așa că de data asta d = CMMDC(0, 6). 6 este cel mai mare număr care le divide și pe 0, și pe 6, așadar răspunsul nostru este 6.

Calculând d = CMMDC(17 640, 54 054), obținem succesiv resturile 1134, 630, 504 și 0, ceea ce ne dă d = 126.

UTILIZĂRILE CMMDC

CMMDC poate fi folosit pentru rezolvarea ecuațiilor când soluțiile sunt numere întregi. Acestea se numesc ecuații diofantice, după matematicianul din Grecia antică numit Diophantus din Alexandria.

Să ne imaginăm că mătuşa Christine pleacă în vacanţa ei anuală în Barbados. Îl trimite înainte pe valetul John la aeroport cu colecţia ei de valize, acestea cântărind fie 18, fie 84 kg, şi este informată că greutatea totală a bagajelor sale este 652 kg. Când John se întoarce la reşedinţa din Belgravia, fiul său de nouă ani, James, începe să spună că „nu poate fi aşa, deoarece CMMDC 6 nu îl divide pe 652". James sugerează că greutatea corectă a bagajelor ar putea fi 642 kg.

James ştie că există o soluţie în numere întregi a ecuaţiei $18x + 84y = c$, dacă şi numai dacă numărul c se împarte la CMMDC 6. Asta nu se întâmplă pentru $c = 652$, dar este valabil pentru 642. James nici măcar nu trebuie să ştie câte valize x, y cu cele două greutăţi vrea mătuşa Christine să ia în Barbados!

TEOREMA CHINEZEASCĂ A RESTURILOR

Când CMMDC pentru două numere este 1, spunem că acestea sunt „relativ prime". Nu trebuie să fie prime ele însele, ci doar să fie prime unul faţă de celălalt, de exemplu CMMDC(6, 35) = 1, chiar dacă nici 6, nici 35 nu sunt prime. Vom avea nevoie de aceasta pentru teorema chinezească a resturilor.

Să luăm o altă problemă: Angus nu ştie câte sticle de vin are, dar, dacă le aşază perechi, îi rămâne una. Când le pune în rânduri de câte 5, îi rămân 3. Câte sticle de vin are? Ştim că prin împărţire la 2 rămâne restul 1 şi prin împărţire la 5 – restul 3. Prima condiţie ne permite să eliminăm toate numerele pare. Parcurgând şirul numerelor impare, aflăm repede că 13 se potriveşte cerinţelor noastre (putem presupune fără să greşim că Angus are mai mult de 3 sticle, un număr care îndeplineşte şi el condiţiile). Dar mai sunt şi alte numere care ar putea fi răspunsul corect – de fapt un şir întreg, care începe cu 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83...

Să adăugăm acum încă o condiţie, ca numărul să dea rest 3 la împărţirea cu 7 (sticlele sosesc în pachete de câte 7, cu 3 de rezervă). Mergând de-a lungul şirului 13, 23, 33, 43, 53, 63,... cu această nouă condiţie, găsim că 73 se potriveşte cerinţelor, dar la fel şi 143 şi 213, precum şi orice număr format prin adăugarea la aceste numere a unor multipli de 70.

În termeni matematici, am găsit soluţii garantate de teorema chinezească a resturilor, care spune şi că oricare două soluţii diferă printr-un multiplu de $2 \times 5 \times 7 = 70$. Dacă Angus are între 150 şi 250 de sticle, atunci teorema stabileşte soluţia la 213 sticle. Nu este deloc rău pentru o teoremă descoperită în secolul al III-lea.

Idee de bază

un drum spre cel mai mare

16 Logica

„Dacă sunt mai puține mașini pe străzi, poluarea va fi acceptabilă. Fie avem mai puține mașini pe străzi, fie introducem taxe de drum, sau ambele. Dacă există taxe de drum, vara va fi insuportabil de fierbinte. Vara se dovedește a fi destul de răcoroasă. Concluzia este inevitabilă: poluarea este acceptabilă."

Este „valid" acest argument al unui editor de ziar sau este ilogic? Nu ne interesează dacă are sens ca politică de planificare rutieră sau dacă este jurnalism de calitate. Suntem interesați doar de validitatea lui ca argument rațional. Logica ne poate ajuta să tranșăm această chestiune – pentru că privește verificarea riguroasă a raționamentului.

DOUĂ PREMISE ȘI O CONCLUZIE

Așa cum arată, paragraful din ziar este destul de complicat. Să ne uităm mai întâi la argumentații mai simple, care merg înapoi în timp până la Aristotel Stagiritul, filosoful din antichitatea elenă considerat întemeietor al științei logicii. Abordarea lui era bazată pe diferite forme de silogism, un stil de argumentație bazat pe trei afirmații: două premise și o concluzie. Iată un exemplu:

Toți cockerii sunt câini.
Toți câinii sunt animale.
Toți cockerii sunt animale.

Deasupra liniei avem premisele, iar sub ea – concluzia. În acest exemplu, concluzia este oarecum inevitabilă, orice alt înțeles am atașa cuvintelor „cockeri", „câini" și „animale". Același silogism, dar folosind cuvinte diferite, este:

Toate merele sunt portocale.
Toate portocalele sunt banane.
Toate merele sunt banane.

CRONOLOGIE

cca 335 î.Hr.
Aristotel pune la punct logica silogismului.

1847 d.Hr.
Boole publică *Analiza matematică a logicii.*

În acest caz, afirmațiile individuale sunt evident lipsite de sens, dacă folosim conotațiile obișnuite ale cuvintelor. Și, totuși, ambele etape ale silogismului au aceeași structură, iar această structură este cea care face silogismul valid. Este, pur și simplu, imposibil de găsit un exemplu cu această structură în care premisele să fie adevărate, dar concluzia să fie falsă. În aceasta stă utilitatea unei argumentații valide.

Toți A sunt B
Toți B sunt C

Toți A sunt C

O argumentație validă

Sunt posibile diverse silogisme, dacă variem cuantificatorii, cum ar fi „toate", „unele" sau „nici unele" (ca în Nici un A nu este B). Un alt exemplu ar putea fi:

Unele A sunt B
Unele B sunt C.
Unele A sunt C.

Este validă și această argumentație? Se aplică oricare ar fi A, B și C sau există un contraexemplu, o variantă mai puțin evidentă în care premisele sunt corecte, dar concluzia este falsă? Dacă înlocuim A cu cockeri, B cu obiecte mari și C cu mese? Este convingătoare și următoarea argumentație?

Unii cockeri sunt mari.
Unele obiecte mari sunt mese.
Unii cockeri sunt mese.

Contraexemplul nostru arată că acest silogism nu este valid. Erau atât de multe tipuri diferite de silogisme, încât savanții medievali au inventat formule mnemonice ca să-i ajute să și le amintească. Astfel, primul nostru exemplu se încadra la categoria TITRAT, deoarece conținea trei utilizări ale lui „toți/toate". Aceste metode de analiză a argumentațiilor au rezistat mai bine de 2 000 de ani și au ocupat un loc de cinste în universitățile medievale. În secolul al XIX-lea, logica lui Aristotel – teoria silogismelor – încă era considerată o știință perfectă.

LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

Un alt tip de logică merge mai departe decât silogismele. Ea operează cu propoziții sau cu enunțuri simple și combinații ale acestora. Ca să analizăm paragraful din ziar vom avea nevoie de unele cunoștințe din această „logică propozițională". Mai demult era denumită „algebra logicii", fapt care ne dă un indiciu referitor la structura ei, având în vedere că George Boole a înțeles că putea fi tratată ca un nou

1910 Russell și Whitehead încearcă să reducă matematica la logică.

1965 Lofti Zadeh dezvoltă logica difuză.

1987 Sistemul de metrou din Japonia este bazat pe logica difuză.

tip de algebră. În anii 1840 s-au făcut multe cercetări în domeniul logicii, de către matematicieni precum Boole și Augustus De Morgan.

Să o testăm și noi. Presupunem că avem propoziția a, unde a înseamnă „Freddy este un cocker". Propoziția a poate fi adevărată sau falsă. Dacă mă gândesc la cățelul meu Freddy, care într-adevăr este un cocker, propoziția este adevărată (A), dar dacă mă gândesc că propoziția s-ar aplica vărului meu, al cărui nume este tot Freddy, atunci propoziția este falsă (F). Caracterul adevărat sau fals al unei propoziții depinde de obiectul de referință.

a	b	$a \vee b$
A	A	A
A	F	A
F	A	A
F	F	F

tabelul de adevăr cu „sau"

Dacă avem o altă propoziție b, cum ar fi „Ethel este o pisică", atunci putem combina aceste două propoziții în câteva feluri. Una dintre combinații este scrisă $a \vee b$. Conectorul $\vee$ corespunde lui „sau", dar utilizarea lui în logică este ușor diferită de înțelesul lui „sau" din limbajul de zi cu zi. În logică, $a \vee b$ este adevărată dacă ori „Freddy este un cocker" este adevărată, ori „Ethel este o pisică" este adevărată, ori ambele sunt adevărate, și este falsă numai dacă a și b sunt amândouă false. Această conjuncție a propozițiilor poate fi rezumată într-un tabel de adevăr.

a	b	$a \wedge b$
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	F

tabelul de adevăr cu „și"

Putem combina propozițiile folosind „și", scris ca $a \wedge b$, și „nu", scris ca $\neg a$. Algebra logicii devine clară atunci când combinăm aceste propoziții folosind o mixtură de conectori cu a, b și c, cum ar fi $a \wedge (b \vee c)$. Putem obține o ecuație pe care o numim o identitate:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

a	$\neg a$
A	F
F	A

tabelul de adevăr cu „nu"

Simbolul = înseamnă echivalență între enunțuri logice, unde ambele părți ale echivalenței au același tabel de adevăr. Există o paralelă între algebra logicii și algebra propriu-zisă, deoarece simbolurile $\wedge$ și $\vee$ acționează similar cu × și + din algebra obișnuită, unde avem $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$. Totuși, paralela nu este exactă și există excepții.

Și alți conectori logici pot fi definiți pe baza celor elementari. Foarte util este conectorul „implică" $a \rightarrow b$, care este definit ca fiind echivalent cu $\neg a \vee b$ și are tabelul de adevăr alăturat.

a	b	$a \rightarrow b$
A	A	A
A	F	F
F	A	A
F	F	A

tabelul de adevăr cu „implică"

Dacă ne întoarcem acum la paragraful din ziar, îl putem scrie în formă simbolică:

M = Mai puține mașini pe străzi
P = Poluarea va fi acceptabilă
S = Ar trebui să existe o schemă de taxare a drumurilor
P = Vara va fi insuportabil de fierbinte

$C \rightarrow B$
$C \vee S$
$S \rightarrow H$
$\neg H$

P

Obținem argumentația prezentată alături. Este validă sau nu? Să presupunem că toate premisele sunt adevărate, dar concluzia P este falsă. Dacă putem arăta că se ajunge astfel la o contradicție, atunci argumentația trebuie să fie validă. Ar fi imposibil să avem premisele adevărate, dar concluzia falsă. Dacă P este falsă, atunci din prima premisă M → P, C trebuie să fie falsă. Cum C ∨ S este adevărată, faptul că M este falsă înseamnă că S este adevărată. Din cea de-a treia premisă, S → F, înseamnă că P este adevărată. Altfel spus, ¬P este falsă. Aceasta contrazice faptul că ¬P, ultima premisă, era presupusă adevărată. Conținutul enunțurilor din ziar poate fi, așadar, în dispută, dar structura argumentației este validă.

ALTE LOGICI

Gottlob Frege, C.S. Peirce și Ernst Schröder au introdus cuantificarea în logica propozițională și au construit o „logică a predicatelor de ordinul I" (numită așa pentru că operează cu predicate, enunțuri logice care depind de una sau mai multe variabile). Aceasta folosește cuantificatorul universal ∀, însemnând „toți", și cuantificatorul existențial ∃, pentru „există".

∨ sau
∧ și
¬ nu
→ implică
∀ toți
∃ există

O altă dezvoltare nouă în logică este ideea de logică difuză. Aceasta sugerează gândirea confuză, dar face referire, de fapt, la extinderea granițelor tradiționale ale logicii. Logica tradițională se bazează pe colecții, sau mulțimi. Am avut mulțimea cockerilor, mulțimea câinilor și mulțimea obiectelor maro. Suntem siguri ce anume face parte din mulțimea respectivă și ce nu. Dacă întâlnim în parc un ciobănesc german, de exemplu, suntem siguri că nu face parte din mulțimea cockerilor.

Logica difuză operează cu ceea ce par să fie mulțimi nedefinite precis. Cum ar fi să avem mulțimea cockerilor grași? Cât de gras trebuie să fie un cocker ca să fie inclus în mulțime? Cu astfel de mulțimi imprecise, există o gradație a apartenenței, iar granița dintre ce este înăuntru și ce rămâne afară este difuză. Matematica ne permite să fim preciși în privința impreciziei. Logica este departe de a fi un subiect epuizat. Ea s-a desprins de Aristotel și este acum un domeniu activ de cercetare modernă și de aplicații.

Idee de bază
linia clară a rațiunii

17 Demonstrația

Matematicienii încearcă să-și justifice afirmațiile prin demonstrații. Căutarea unor argumentații raționale incontestabile este impulsul vital al matematicii pure. Lanțuri de deducții corecte pornind de la ceea ce este cunoscut sau presupus îl conduc pe matematician la o concluzie care intră apoi în patrimoniul matematicii.

Demonstrațiile nu sunt ușor de găsit – de multe ori, se ajunge la ele după multe explorări și piste false. Lupta pentru alcătuirea lor constituie preocuparea centrală din viața matematicianului. O demonstrație reușită poartă marca autenticității matematicianului, făcând diferența dintre teorema consacrată și conjectură, idee sclipitoare sau intuiție.

Calitățile urmărite într-o demonstrație sunt rigoarea, transparența și, nu în ultimul rând, eleganța. O demonstrație bună este „aceea care ne face mai înțelepți" – dar, în același timp, este mai bine să ai o demonstrație, oricum ar fi ea, decât nici o demonstrație. Progresul pe baza unor fapte nedovedite ascunde pericolul ca teoriile să fie construite pe echivalentul matematic al nisipului.

O demonstrație nu este neapărat pentru totdeauna, pentru că s-ar putea să fie revizuită, în lumina dezvoltării conceptelor cu care are legătură.

CE ESTE O DEMONSTRAȚIE?

Când citești sau auzi de un rezultat matematic, îl crezi? Ce te-ar face să îl crezi? Un răspuns ar fi o argumentație logică solidă, care progresează de la idei pe care le accepți până la enunțul în legătură cu care îți pui întrebări. Aceasta ar fi ceea ce matematica numește demonstrație, în forma ei obișnuită un amestec de limbaj de zi cu zi și logică strictă. În funcție de calitatea demonstrației, poți fi convins sau poți rămâne sceptic.

Principalele tipuri de demonstrație folosite în matematică sunt: metoda contra-exemplului; metoda directă; metoda indirectă și metoda inducției matematice.

CRONOLOGIE

30 î.Hr.
Elementele lui Euclid oferă modelul pentru demonstrația matematică.

1637 d.Hr.
Descartes promovează rigoarea matematică drept model în cartea sa *Discurs asupra metodei*

CONTRAEXEMPLUL

Să începem prin a fi sceptici – aceasta este o metodă de a dovedi că un enunț este incorect. Vom lua drept exemplu o afirmație concretă. Să presupunem că auzim afirmația că orice număr înmulțit cu el însuși are drept rezultat un număr par. Credem asta? Înainte să ne repezim cu răspunsul, ar trebui să încercăm câteva exemple. Dacă avem un număr, să zicem 6, și îl înmulțim cu el însuși, $6 \times 6 = 36$, iar rezultatul 36 este un număr par. Dar cu o floare nu se face primăvară. Afirmația inițială se referea la orice număr, și există o infinitate. Ca să ne familiarizăm cu problema, ar trebui să mai încercăm câteva exemple. Încercând 9, să spunem, descoperim că $9 \times 9 = 81$. Dar 81 este un număr impar. Aceasta înseamnă că enunțul potrivit căruia toate numerele înmulțite cu ele însele dau un număr par este fals. Un asemenea exemplu contrazice enunțul original și este numit contraexemplu. Un contraexemplu la afirmația că „toate lebedele sunt albe" ar fi să vedem o lebădă neagră. O parte a distracției în matematică stă în a căuta un contraexemplu care să demoleze o posibilă teoremă.

Dacă nu reușim să găsim un contraexemplu, s-ar putea să avem senzația că enunțul este corect. Atunci matematicianul trebuie să joace un altfel de joc. Trebuie construită o demonstrație, iar cel mai simplu tip este demonstrația prin metoda directă.

METODA DIRECTĂ

În metoda directă, mergem înainte cu argumentația logică de la ceea ce este deja stabilit sau a fost presupus până la concluzie. Dacă putem face asta, avem o teoremă. Nu putem dovedi că înmulțind orice număr cu el însuși obținem un număr par, deoarece deja am arătat că nu este adevărat. Dar s-ar putea să reușim să salvăm ceva. Diferența dintre primul nostru exemplu, 6, și contraexemplul 9 este că primul număr este par, iar contraexemplul este impar. Ce putem face este să schimbăm ipoteza. Noul nostru enunț va fi: dacă înmulțim un număr par cu el însuși, obținem un număr par.

Încercăm mai întâi alte câteva exemple de numere și descoperim că afirmația se verifică de fiecare dată și chiar nu putem găsi nici un contraexemplu. Schimbăm abordarea și încercăm să demonstrăm, dar cum să începem? Am putea să începem cu un număr oarecare par n, dar, cum asta pare destul de abstract, o să vedem cum arată o demonstrație pentru un număr concret, să zicem 6. După cum știți, un număr par este un multiplu de 2, adică $6 = 2 \times 3$. Cum $6 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$, care se poate scrie altfel $6 \times 6 = 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3$, iar dacă rescriem folosind paranteze

$$6 \times 6 = 2 \times (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3)$$

1838 De Morgan introduce termenul „inducție matematică".

1967 Bishop demonstrează rezultate exclusiv prin metode constructive

1976 Imre Lakatos publică *Demonstrații și negări*

Aceasta înseamnă că 6×6 este multiplu de 2 și, în consecință, este număr par. Dar în această demonstrație nu există nimic care să fie specific lui 6, așa că am fi putut începe cu $n = 2 \times k$ și să obținem

$$n \times n = 2 \times (k + k + \ldots + k)$$

ajungând la concluzia că $n \times n$ este par. Demonstrația noastră este acum completă. Când a tradus *Elementele* lui Euclid, un matematician de mai târziu a scris „QED" la sfârșitul unei demonstrații, ca să spună că misiunea a fost îndeplinită – este o abreviere pentru expresia în latină *quod erat demonstrandum* (ceea ce era de demonstrat). În zilele noastre, matematicienii folosesc un pătrat negru ■ (sau un pătrat gol □). Semnul se numește *halmos*, după numele celui care l-a introdus, Paul Halmos.

METODA INDIRECTĂ

În această metodă, presupunem că concluzia este falsă și, prin argumentație logică, arătăm că aceasta contrazice ipoteza. Să dovedim rezultatul anterior prin această metodă.

Ipoteza noastră este că n este par și vom pretinde că $n \times n$ este impar. Putem scrie $n \times n = n + n + \ldots + n$, de n ori. Aceasta înseamnă că n nu poate fi par (deoarece, dacă ar fi, atunci și $n \times n$ ar fi par). Așadar, n este impar, ceea ce contrazice ipoteza.

Aceasta este, de fapt, o formă moderată a metodei indirecte. Metoda indirectă cu putere deplină este cunoscută drept *reductio ad absurdum* (reducere la absurd) și era foarte iubită de grecii din Antichitate. În Academia din Atena, Socrate și Platon adorau să dovedească un fapt disputat înconjurându-și oponentul într-o plasă de contradicții, din care singura ieșire era enunțul pe care urmăreau să-l dovedească. Demonstrația clasică a faptului că rădăcina pătrată a lui 2 este un număr irațional este una de acest tip, unde începem presupunând că rădăcina pătrată a lui 2 este un număr rațional și ajungem la o contradicție a acestei presupuneri.

METODA INDUCȚIEI MATEMATICE

Inducția matematică este o modalitate puternică de a demonstra că enunțurile dintr-un șir P_1, P_2, P_3, ... sunt toate adevărate. Augustus de Morgan și-a dat seama de aceasta în anii 1830 și a dat o formă oficială la ceea ce se știa de sute de ani. Această tehnică specifică (și care nu trebuie confundată cu inducția științifică) este folosită pe scară largă pentru a dovedi enunțuri în care sunt implicate numere întregi. Este foarte utilă mai ales în teoria grafurilor, în teoria numerelor și în știința computerelor, în general. Ca un exemplu practic, să ne gândim la problema însumării numerelor impare. De exemplu, suma primelor trei numere impare $1 + 3 + 5$ este 9, în timp ce suma primelor patru $1 + 3 + 5 + 7$ este 16. Dar 9 este $3 \times 3 = 3^2$ și 16 este $4 \times 4 = 4^2$, așadar, ar fi posibil ca suma primelor n numere impare să fie egală cu n^2? Dacă testăm o valoare a lui n aleasă la întâmplare, să spunem $n = 7$, găsim într-adevăr că suma primelor șapte

numere este $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$, ceea ce este 7^2. Este respectat însă tiparul pentru toate valorile lui n? Cum am putea fi siguri? Avem o problemă, deoarece nu putem spera să verificăm individual un număr infinit de cazuri.

Acesta este momentul în care intră în scenă inducția matematică. Mai neprotocolar spus, este o demonstrație prin metoda dominoului. Metafora se aplică unui șir de piese de domino așezate vertical, pe muchie, într-un șir. Dacă o piesă cade, o va dărâma și pe următoarea. Asta este limpede. Ca să le facem să cadă pe *toate*, nu trebuie decât să dărâmăm prima piesă. Putem aplica metoda și la problema numerelor impare. Enunțul P_n spune că suma primelor n numere impare este n^2. Inducția matematică declanșează o reacție în lanț, prin care P_1, P_2, P_3 ... vor fi toate adevărate. Enunțul este banal, pentru că $1 = 1^2$. Următorul enunț, P_2, este adevărat pentru că $1 + 3 = 1^2 + 3 = 2^2$, P_3 este adevărat pentru că $1 + 3 + 5 = 2^2 + 5 = 3^2$ și P_4 este adevărat pentru că $1 + 3 + 5 + 7 = 3^2 + 7 = 4^2$. Folosim rezultatul dintr-o etapă ca să sărim la etapa următoare. Acest proces poate fi scris formal, ca o aplicație a metodei inducției matematice.

DIFICULTĂȚI

Demonstrațiile vin sub toate formele și în toate dimensiunile. Unele sunt scurte și energice, mai ales cele găsite în manuale. Altele, care detaliază cercetări de ultimă oră, au ocupat reviste întregi și pot ajunge la mii de pagini. Foarte puțini oameni vor înțelege întreaga argumentație, în aceste cazuri.

Există și probleme fundamentale. De exemplu, câțiva matematicieni sunt nemulțumiți de metoda de demonstrație indirectă *reductio ad absurdum* atunci când aceasta se aplică la existență. Dacă presupunerea că soluția unei ecuații nu există duce la o contradicție, este aceasta suficient pentru a dovedi că există o soluție? Oponenții acestei metode de demonstrație vor susține că logica este forțată și că nu ne spune și cum să obținem efectiv o soluție concretă. Ei se numesc „constructiviști" (de diferite nuanțe) care spun că această metodă de demonstrație nu reușește să dea și o „semnificație numerică". Ei îl privesc cu dispreț pe matematicianul clasic, care consideră metoda reducerii la absurd o armă esențială în arsenalul matematicii. Pe de altă parte, matematicianul mai tradiționalist va spune că eliminarea acestui tip de argumentație ar fi ca și cum ai lucra cu o mână legată la spate și, mai mult, negarea atâtor rezultate obținute prin această metodă indirectă ar lăsa un gol semnificativ în matematică.

Idee de bază
semnat și expediat

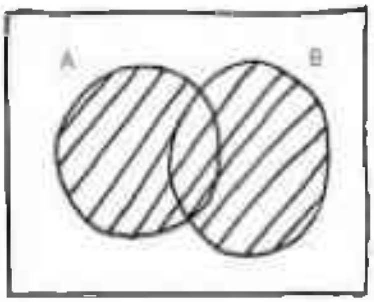
18 Mulțimi

Nicholas Bourbaki a fost un pseudonim folosit de un grup de savanți francezi, care voiau să rescrie matematica de la cap la coadă, „așa cum trebuie". Pretenția lor îndrăzneață era că totul trebuie să se bazeze pe teoria mulțimilor. Metoda axiomatică era fundamentală, iar cărțile pe care le-au publicat erau scrise în stilul riguros „definiție, teoremă și demonstrație". Acesta era, de altfel, și impulsul mișcării moderne din matematica anilor 1960.

Georg Cantor a elaborat teoria mulțimilor din dorința de a pune teoria numerelor reale pe o bază solidă. Cu toate prejudecățile și criticile inițiale, spre sfârșitul secolului XX, teoria mulțimilor era deja consolidată ca o ramură a matematicii.

CE SUNT MULȚIMILE?

O mulțime poate fi privită ca un set de obiecte. Aceasta nu este o definiție oficială, dar ne oferă ideea principală. Obiectele propriu-zise sunt numite „elemente" sau „membri" ai mulțimii. Dacă scriem o mulțime A care are un element a, am putea scrie $a \in A$, cum a făcut Cantor. Un exemplu este $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și putem scrie $1 \in A$ pentru apartenență și $6 \notin A$ pentru non-apartenență.



Reuniunea lui A și B

Există două moduri importante în care pot fi combinate mulțimile. Dacă A și B sunt două mulțimi, atunci mulțimea formată din elemente care aparțin sau mulțimii A, sau mulțimii B, sau ambelor este numită „reuniunea" celor două mulțimi. Matematicienii scriu aceasta ca fiind $A \cup B$. Ea poate fi, de asemenea, descrisă printr-o diagramă Venn, numită după logicianul din epoca victoriană John Venn. Euler a folosit și mai devreme diagrame ca acestea.

Mulțimea $A \cap B$ constă din elemente care fac parte și din mulțimea A, și din mulțimea B și se numește „intersecția" celor două mulțimi.

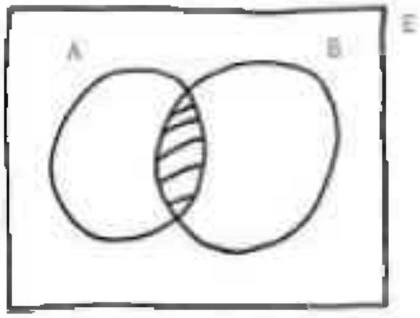
CRONOLOGIE

1872
Cantor face o primă încercare de formulare a unei teorii a mulțimilor.

1881
Venn popularizează „diagramele Venn" pentru mulțimi.

1931
Gödel dovedește că orice sistem matematic axiomatic formal conține afirmații indecise.

Dacă $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{1, 3, 5, 7, 10, 21\}$, reuniunea este $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 21\}$ și intersecția este $A \cap B = \{1, 3, 5\}$. Dacă privim o mulțime A ca parte a unei mulțimi universale E, putem defini mulțimea complementară $\neg A$ ca fiind formată din acele elemente din E care nu sunt în A.



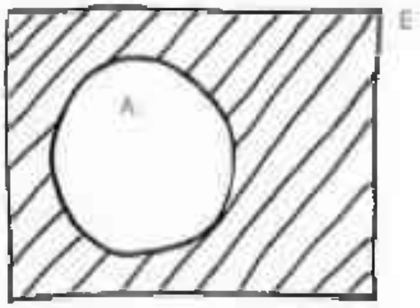
Intersecția lui A și B

Operațiunile $\cap$ și $\cup$ sunt analoage cu $\times$ și $+$ din algebră. Împreună cu operațiunea complementară $\neg$, formează o „algebră a mulțimilor". Matematicianul britanic, născut în India, Augustus De Morgan a formulat legi pentru aceste trei operațiuni. În notația noastră modernă, legile lui Morgan sunt:

$$\neg(A \cup B) = (\neg A) \cap (\neg B)$$

și

$$\neg(A \cap B) = (\neg A) \cup (\neg B)$$



Complementara lui A

PARADOXURILE

Nu există probleme în operarea cu mulțimi finite, deoarece le putem scrie elementele ca în $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dar, în vremea lui Cantor, mulțimile infinite stârneau mai multe provocări.

Cantor a definit mulțimile ca fiind seturi de elemente cu o proprietate specifică. Să luăm mulțimea $\{11, 12, 13, 14, 15, \ldots\}$, toate numere mai mari decât 10. Deoarece mulțimea este infinită, nu îi putem scrie toate elementele, dar tot o putem determina, datorită proprietății pe care toate elementele ei o au în comun. Urmând recomandarea lui Cantor, putem scrie mulțimea ca $A = \{x: x$ este un număr întreg $> 10\}$, unde cele două puncte înseamnă „astfel încât".

În teoria primitivă a mulțimilor am putea avea și o mulțime a lucrurilor abstracte, $A = \{x: x$ este ceva abstract$\}$. În acest caz, mulțimea A însăși este ceva abstract, astfel încât este posibil să avem $A \in A$. Dar dacă admitem această relație, apar probleme serioase. Filosoful britanic Bertrand Russell a lansat ideea unei mulțimi S conținând toate lucrurile care nu se conțin pe ele însele. Cu simboluri, aceasta este $S = \{x: x \notin x\}$.

El a pus apoi întrebarea dacă $S \in S$? Dacă răspunsul este da, atunci S trebuie să satisfacă definiția lui S, așadar $S \notin S$. Pe de altă parte, dacă răspunsul este nu și

1939
Pseudonimul Bourbaki este folosit pentru prima dată de matematicienii francezi

1964
Cohen demonstrează independența ipotezei continuumului

$S \in S$, atunci S nu satisface relația de definire a lui $S = \{x: x \notin x\}$ și astfel $S \notin S$. Întrebarea lui Russell a sfârșit cu acest enunț, baza paradoxului lui Russell.

$$S \in S \text{ dacă și numai dacă } S \notin S$$

Este similar cu „paradoxul bărbierului”, în care bărbierul dintr-un sat îi anunță pe localnici că îi va bărbieri doar pe cei care nu se bărbieresc singuri. Apare imediat întrebarea: bărbierul ar trebui să se bărbierească? Dacă nu se bărbierește singur, ar trebui. Dacă se bărbierește singur, nu ar trebui.

Este necesar să evităm asemenea paradoxuri, numite politicos „antinomii”. Pentru matematicieni, pur și simplu, nu este permis să aibă sisteme care generează contradicții. Russell a creat o teorie a tipurilor, care permite ca $a \in A$ numai dacă a este de un tip inferior lui, evitând astfel expresiile de genul $S \in S$.

O altă modalitate de a evita asemenea antinomii a fost formalizarea teoriei mulțimilor. În această abordare nu trebuie să ne preocupe natura mulțimilor propriu-zise, ci lista axiomelor formale care precizează regulile pentru tratarea lor. Grecii au încercat ceva similar cu o problemă a lor – ei nu trebuiau să explice ce erau liniile drepte, ci doar cum se lucrează cu ele.

În cazul teoriei mulțimilor, aceasta a fost originea axiomelor Zermelo–Fraenkel pentru teoria mulțimilor, care previn apariția în sistemul lor a mulțimilor prea „mari”. Aceasta a împiedicat apariția unor creaturi periculoase, cum ar fi mulțimea tuturor mulțimilor.

TEOREMA LUI GÖDEL

Matematicianul austriac Kurt Gödel a dat o lovitură letală celor care voiau să scape de paradoxuri în sisteme axiomatice formale. În 1931, Gödel a demonstrat că până și pentru cele mai simple dintre sistemele formale existau enunțuri ai căror adevăr sau a căror falsitate nu puteau fi deduse din interiorul acestor sisteme. Mai simplu, existau enunțuri la care axiomele sistemului nu puteau ajunge. Nu puteau fi nici demonstrate, nici infirmate. Din acest motiv, teorema lui Gödel mai este denumită „teorema incompletitudinii”. Acest rezultat se aplică sistemului Zermelo-Fraenkel, ca și altor sisteme.

NUMERELE CARDINALE

Numărul de elemente ale unei mulțimi finite este ușor de stabilit, de exemplu, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ are cinci elemente sau, altfel spus, „cardinalitatea” ei este 5 și scriem $card(A) = 5$. Mai puțin protocolar spus, cardinalitatea măsoară mărimea unei mulțimi.

Potrivit teoriei mulțimilor a lui Cantor, mulțimea fracțiilor $\mathbb{Q}$ și cea a numerelor reale $\mathbb{R}$ sunt foarte diferite. Mulțimea $\mathbb{Q}$ poate fi pusă pe o listă, mulțimea $\mathbb{R}$ nu

(vezi p. 31). Deși ambele mulțimi sunt infinite, mulțimea **R** are un ordin de infinitate mai mare decât **Q**. Matematicienii notează card(**Q**) cu $\aleph_0$, litera ebraică „aleph" zero, și card(**R**) = c. Așadar, asta înseamnă că $\aleph_0 < c$.

IPOTEZA CONTINUUMULUI

Adusă la lumină de Cantor în 1878, ipoteza continuumului spune că următorul nivel de infinitate după infinitatea lui **Q** este infinitatea numerelor reale c. Altfel spus, ipoteza continuumului afirmă că nu există nici o mulțime a cărei cardinalitate să se afle strict între $\aleph_0$ și c. Cantor s-a luptat mult cu ea și, deși credea că era adevărată, nu a putut să o dovedească. Pentru a arăta că nu este adevărată, ar trebui găsită o submulțime X a lui **R** cu $\aleph_0 <$ card(X) $< c$, dar Cantor nu a reușit nici asta.

Problema era atât de importantă, încât matematicianul german David Hilbert a plasat-o în capul listei sale cu 23 de probleme remarcabile pentru secolul următor, prezentată la Congresul Internațional de Matematică de la Paris, din 1900.

Gödel era convins că ipoteza era falsă, dar nu a demonstrat acest lucru. Ceea ce a dovedit el (în 1938) a fost că ipoteza era compatibilă cu axiomele Zermelo–Fraenkel pentru teoria mulțimilor. Un sfert de secol mai târziu, Paul Cohen l-a surprins pe Gödel și pe logicieni cu demonstrația că ipoteza continuumului nu putea fi dedusă din axiomele Zermelo–Fraenkel. Aceasta este echivalent cu a demonstra că axiomele și negarea ipotezei nu se contrazic. Combinat cu rezultatul din 1938 al lui Gödel, Cohen a arătat că ipoteza continuumului era independentă de restul axiomelor pentru teoria mulțimilor.

Această stare de lucruri este similară cu modul în care postulatul paralelelor din geometrie (vezi p. 108) este independent de celelalte axiome ale lui Euclid. Descoperirea respectivă a dus la o înflorire a geometriilor neeuclidiene, care, printre alte lucruri, au făcut posibilă teoria relativității a lui Einstein. La fel, ipoteza continuumului poate fi acceptată sau respinsă fără a deranja celelalte axiome pentru teoria mulțimilor. Rezultatul de pionierat al lui Cohen a fost urmat de crearea unui nou domeniu, care a atras generații de matematicieni ce au adoptat tehnicile folosite de el pentru a dovedi independența ipotezei continuumului.

idee de bază

mai mulți tratați ca unul

19 Calculul diferențial și integral

Calculul este o modalitate de a face operațiuni, așa că matematicienii vorbesc uneori despre „calculul logicii", „calculul probabilităților" și așa mai departe. Dar cu toții admit că există, de fapt, un singur Calcul, pur și simplu, iar acesta se scrie cu C mare.

Calculul diferențial și integral este o piesă centrală a matematicii. Ar fi ceva rar pentru un savant, un inginer sau un economist din zilele noastre să nu dea peste Calcul, atât de vaste sunt aplicațiile lui. Istoric, el este asociat cu Isaac Newton și Gottfried Leibniz, pionierii calculului din secolul al XVII-lea. Asemănarea dintre teoriile lor a dus la o dispută referitoare la cine era descoperitorul Calculului. De fapt, ambii au ajuns la concluziile lor independent, doar metodele au fost diferite.

De atunci, Calculul a devenit un subiect uriaș. Fiecare generație cercetează minuțios tehnici despre care crede că ar trebui învățate de generația mai tânără, iar manualele din zilele noastre trec de 1 000 de pagini și vin cu numeroase lucruri în plus. Pentru toate acestea, absolut esențiale sunt derivatele și integralele, piscurile gemene ale Calculului, așa cum a fost el creat de Newton și Leibniz. Denumirile lor vin de la *differentialis* (a stabili diferențele sau „a descompune") și *integralis* (suma părților sau „punere laolaltă") ale lui Leibniz.

În limbaj tehnic, calculul diferențial se ocupă cu măsurarea schimbărilor, iar integralele cu măsurarea ariei, dar giuvaerul din coroana Calculului este „rezultatul vedetă" că ele sunt fețe ale aceleiași monede – diferențialele și integralele sunt inverse una față de alta. Calculul este, de fapt, un singur subiect și tot ceea ce trebuie să știi despre ambele aspecte. Nu este de mirare că „modelul însuși de general maior modern" al lui Gilbert și Sullivan, din *Pirații din Penzance*, le proclamă mândru pe amândouă:

Cu multe vesele realizări despre pătratul ipotenuzei.
Sunt foarte bun la calculul diferențial și integral.

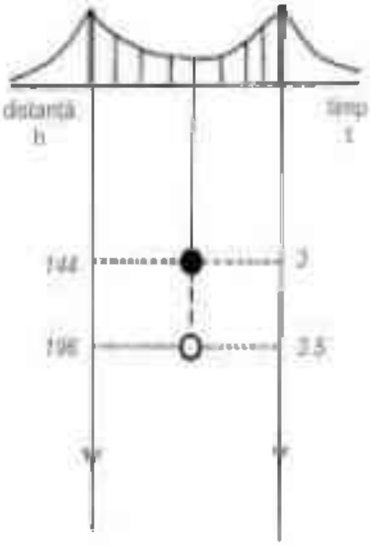
CRONOLOGIE

cca 450 î.Hr.	anii 1660–1670 d.Hr.	1734
Zeno ridiculizează infinitezimalele cu un paradox	Newton și Leibniz fac primii pași în calculul diferențial și integral	Berkeley atrage atenția asupra slăbiciunilor fundamentale

DIFERENȚIALE

Savanților le sunt foarte dragi „experimentele mentale" – lui Einstein îi plăceau în mod special. Imaginați-vă că stați pe un pod, la mare înălțime deasupra defileului, și sunteți pe cale să lăsați o piatră să cadă. Ce se va întâmpla? Avantajul unui experiment mental este că nu trebuie să ne aflăm acolo în persoană. De asemenea, putem face lucruri imposibile, cum ar fi să oprim piatra în aer la jumătatea căderii sau să o privim cu încetinitorul, pentru un scurt interval de timp.

Conform teoriei gravitației a lui Newton, piatra va cădea. Nimic surprinzător aici; piatra este atrasă de pământ și va cădea din ce în ce mai repede în timp ce cronometrul din mâna noastră merge. Un alt avantaj al unui experiment mental este că putem ignora factori care complică, precum rezistența aerului.



Care este viteza pietrei la un anumit moment de timp, să spunem, când oprim cronometrul la exact 3 secunde după ce i-am dat drumul? Cum facem asta? Cu siguranță că putem măsura viteza medie, dar problema noastră este cum măsurăm viteza instantanee. Având în vedere că experimentul este mental, putem să oprim piatra în aer și apoi să o lăsăm să cadă încă o fracțiune de secundă? Dacă împărțim această distanță suplimentară la timpul suplimentar, vom obține viteza medie într-un interval foarte mic de timp. Dacă luăm intervale de timp din ce în ce mai mici, viteza medie va fi tot mai apropiată de viteza instantanee în locul în care am oprit piatra. Acest proces limitativ este ideea de bază din spatele Calculului.

S-ar putea să fim tentați să facem micul interval de timp suplimentar egal cu zero. Dar, în experimentul nostru mental, piatra nu s-ar mai mișca deloc! Nu s-a mișcat pe nici o distanță și nu i-a luat nici un interval de timp! Asta ne-ar da viteza medie 0/0, ceea ce filosoful și episcopul irlandez George Berkeley (zis și Bishop Berkeley) a descris, cu o expresie rămasă celebră, drept „fantoma cantităților dispărute". Această expresie nu poate fi determinată – ea este, în realitate, lipsită de sens. Dacă o luăm pe acest drum, suntem conduși spre un impas numeric.

Ca să mergem mai departe, avem nevoie de niște simboluri. Formula exactă care face legătura dintre distanța parcursă în cădere, h, și timpul t până acolo a fost stabilită de Galilei:

$$y = 16 \times t^2$$

anii 1820
Cauchy oficializează riguros teoria.

1854
Riemann prezintă integrala Riemann.

1902
Lebesgue lansează teoria integralei Lebesgue.

Factorul „16" apare, în acest caz, deoarece unitățile de măsură sunt piciorul și secunda. Dacă vrem să știm, de exemplu, cât a căzut piatra în 3 secunde, substituim, pur și simplu, în formulă $x = 3$ și calculăm răspunsul $y = 16 \times 3^2 = 144$ picioare. Dar cum putem calcula viteza pietrei la momentul $x = 3$?

Să mai luăm o jumătate de secundă și să vedem cât a mai parcurs piatra între 3 și 3,5 secunde. În 3,5 secunde, piatra a parcurs $y = 16 \times 3{,}5^2 = 196$, deci între secunda 3 și 3,5 piatra a căzut $196 - 144 = 52$ picioare. Cum viteza este egală cu distanța împărțită la timp, viteza medie în acest interval temporal este $52/0{,}5 = 104$ picioare pe secundă. Aceasta este apropiată de viteza instantanee la $x = 3$, dar s-ar putea la fel de bine să spuneți că 0,5 secunde nu este un interval de timp suficient de mic. Să repetăm procesul cu un interval de timp mai mic, să spunem de 0,05 secunde, și vom vedea că distanța parcursă în acest interval de timp este $148{,}84 - 144 = 4{,}84$, ceea ce ne dă o viteză medie de $4{,}84/0{,}05 = 96{,}8$ picioare pe secundă. Aceasta va fi și mai apropiată de viteza instantanee a pietrei după trei secunde, când $x = 3$.

Acum trebuie să luăm taurul de coarne și să abordăm problema calculării vitezei medii a pietrei între secunda x și momentul ulterior foarte apropiat, de la $x + h$. După puțină jonglerie cu simbolurile, obținem că viteza medie este

$$16 \times (2x) + 16 \times h$$

u	du/dx
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$
...	...
x^n	nx^{n-1}

Pe măsură ce facem *h* din ce în ce mai mic, așa cum am făcut de la 0,5 la 0,05 secunde, vedem că prima parte rămâne neafectată, iar cea de-a doua devine și ea din ce în ce mai mică. Ajungem la concluzia că

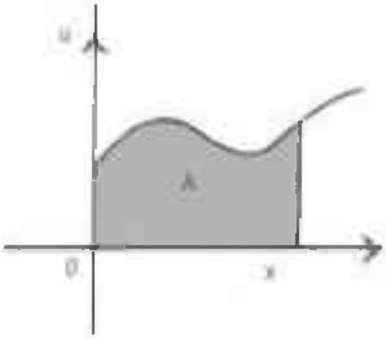
$$v = 16 \times (2x)$$

unde v este viteza instantanee a pietrei la momentul x. De exemplu, după 1 secundă (când $x = 1$), viteza pietrei este $16 \times (2 \times 1) = 32$ picioare pe secundă; după 3 secunde este $16 \times (2 \times 3) = 96$ picioare pe secundă.

Când comparăm formula distanței a lui Galileo, $y = 16 \times x^2$, cu formula vitezei $v = 16 \times (2x)$, diferența esențială este schimbarea lui x^2 cu $2x$. Acesta este efectul diferențializării, trecerea de la $u = x^2$ la derivata $\dot{u} = 2x$. Newton a numit $\dot{u} = 2x$ un „fluxion", iar variabila x un „fluent", deoarece el gândea în termenii unor cantități fluente. În zilele noastre scriem, de obicei, $u = x^2$, iar pe derivata lui ca fiind $du/dx = 2x$. Introdusă inițial de Leibniz, folosirea continuă a acestei notații reprezintă succesul „d-urilor" lui Leibniz asupra punctelor lui Newton.

Piatra în cădere liberă a fost un exemplu, dar, dacă avem alte expresii reprezentate prin u, am putea calcula și pentru ele derivata, ceea ce poate fi util în alte contexte. Există un tipar aici: derivata este formată prin înmulțirea cu puterea precedentă și scăzând apoi 1 din acest rezultat, ca să obținem noua putere.

INTEGRALA



Prima aplicație a integralei a fost măsurarea ariei. Măsurarea suprafeței de sub o curbă se face împărțind-o în fâșii aproximativ dreptunghiulare, fiecare cu lățimea dx. Calculând suprafața fiecăreia și adunându-le, obținem „suma", respectiv aria totală. Notația S pentru sumă a fost introdusă de Leibniz sub forma elongată ∫. Aria fiecărei fâșii dreptunghiulare este udx, așadar aria de sub curbă de la 0 până la x este

$$A = \int_0^x u\,dx$$

Dacă ne uităm la curba $u = x^2$, găsim aria desenând fâșii dreptunghiulare înguste sub curbă, însumându-le ca să calculăm aria aproximativă și aplicând, apoi, un proces de trecere la limită a lățimilor lor, ca să obținem aria exactă. Rezultatul în acest caz ne dă aria

$$A = \frac{x^3}{3}$$

Putem calcula integrala și pentru alte curbe (și pentru alte expresii ale lui x). La fel ca în cazul derivatei, există un tipar și pentru integrala puterilor lui x. Integrala este dată de împărțirea ei la „puterea precedentă + 1" și apoi adunarea unui 1, pentru a obține noua putere.

u	$\int_0^x u\,dx$
x^2	$x^3/3$
x^3	$x^4/4$
x^4	$x^5/5$
x^7	$x^8/8$
...	...
x^n	$x^{n+1}/(n+1)$

REZULTATUL-VEDETĂ

Dacă derivăm integrala $A = x^3/3$, obținem, de fapt, originalul $u = x^2$. Dacă integrăm derivata $du/dx = 2x$, obținem, de asemenea, originalul $u = x^2$. Derivarea este inversul integrării, observație cunoscută drept Teorema fundamentală a Calculului și una dintre cele mai importante teoreme din toată matematica.

Fără calcul diferențial și integral nu ar fi sateliți pe orbită, nici o teorie economică, iar statistica ar fi o disciplină foarte diferită. Oriunde apare o schimbare, găsim acolo și Calculul.

Idee de bază
mergând la limită

20 Construcții

Să dovedești ceva negativ este deseori dificil, dar unele dintre cele mai mari triumfuri din matematică fac exact asta. Aceasta înseamnă să dovedești că un lucru anume nu poate fi făcut. Cuadratura cercului este imposibilă, dar cum dovedim acest lucru?

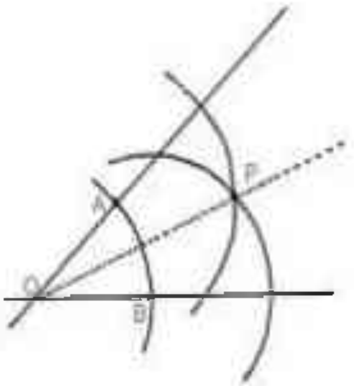
Grecii din Antichitate aveau patru mari probleme de construcție:

- trisecțiunea unghiului (împărțirea unui unghi în trei unghiuri egale mai mici);
- dublarea cubului (construirea unui al doilea cub cu volum dublu față de primul);
- cuadratura cercului (crearea unui pătrat având aceeași suprafață cu un cerc dat);
- construirea poligoanelor (forme regulate cu laturi și unghiuri egale).

Pentru a îndeplini aceste sarcini, ei se foloseau doar de strictul necesar:

- o riglă pentru desenarea liniilor drepte (și categoric nu pentru măsurarea lungimilor);
- un compas pentru desenarea cercurilor.

Dacă vă place să escaladați munți fără corzi, oxigen, telefoane mobile și alte accesorii, aceste probleme vă vor atrage, fără îndoială. În lipsa echipamentelor moderne de măsurare, era nevoie de tehnici matematice sofisticate pentru obținerea acestor rezultate, iar problemele clasice de construcție ale Antichității și-au găsit soluții abia în secolul al XIX-lea, folosind tehnicile analizei matematice moderne și ale algebrei abstracte.



Bisectoarea unghiului

BISECTOAREA ȘI TRISECTOAREA UNGHIULUI

Iată o modalitate de a împărți un unghi în două unghiuri mai mici, egale sau, cu alte cuvinte, de a trasa bisectoarea cercului. Mai întâi plasați vârful compasului în punctul *O* și, oricare ar fi cazul, marcați *OA* și *OB*. Deplasați apoi vârful compasului în punctul *A* și desenați un arc de cerc. Faceți același lucru din punctul *B*. Marcați cu *P* punctul în care se intersectează cele două arce și, folosind rigla,

CRONOLOGIE

450 î. Hr.	1672 d.Hr.	1801
Aflat în închisoare, Anaxagoras încearcă să rezolve cuadratura cercului.	Mohr arată că toate construcțiile euclidiene pot fi făcute doar cu compasul.	Gauss publică *Discursuri despre aritmetică*, în care include un capitol despre construcția unui poligon cu 17 laturi, folosind rigla și compasul.

uniți O cu P. Triunghiurile *AOP* și *BOP* sunt identice ca formă, așadar unghiurile *AÔP* și *BÔP* sunt egale. Linia *OP* este bisectoarea căutată, care împarte unghiul în două unghiuri egale.

Putem folosi o secvență similară de acțiuni pentru a împărți un unghi oarecare în trei unghiuri egale? Aceasta este problema trisecțiunii unghiului.

Dacă unghiul are 90°, adică este un unghi drept, lucrurile sunt foarte simple, pentru că se poate construi unghiul de 30°. Dar dacă luăm un unghi de 60°, de exemplu, acest unghi nu poate fi împărțit în trei. Știm că răspunsul este 20°, dar nu există nici o modalitate de a construi acest unghi folosind doar rigla și compasul. Ca să rezumăm:

- poți trasa *oricând* bisectoarea *oricărui* unghi,
- poți împărți în trei *unele* unghiuri, *oricând*, dar
- nu poți împărți în trei *toate* unghiurile, *oricând*.

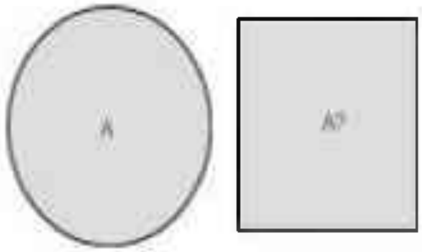
Dublarea cubului este o problemă asemănătoare, cunoscută sub numele de problema deliană. Legenda spune că localnicii din Delos, Grecia, au consultat un oracol pe tema epidemiei cu care se confruntau. Li s-a spus să construiască un nou altar, de două ori mai mare ca volum decât cel pe care îl aveau.

Imaginați-vă altarul din Delos ca fiind un cub tridimensional, cu toate laturile de lungime egală, să-i spunem a. Așadar, localnicii trebuiau să construiască un alt cub cu latura *b*, al cărui volum să fie de două ori mai mare. Volumele cuburilor sunt a^3 și b^3, legate prin relația $b^3 = 2a^3$ sau $b = \sqrt[3]{2} \times a$, unde $\sqrt[3]{2}$ este acel număr care, înmulțit de trei ori cu el însuși, dă rezultatul 2 (rădăcina cubică). Dacă latura cubului original era $a = 1$, localnicii din Delos ar fi trebuit să marcheze lungimea $\sqrt[3]{2}$ pe o linie. Din nefericire pentru ei, acest lucru este imposibil de realizat doar cu rigla și compasul, oricâtă ingeniozitate ar dovedi amatorul de asemenea construcții.

CUADRATURA CERCULUI

Această problemă, puțin diferită, este cea mai faimoasă dintre problemele de construcție:

Să construiești un pătrat a cărui arie este egală cu aria unui cerc dat.



Cuadratura cercului

1837

Wantzel demonstrează că problemele clasice ale dublării cubului și trisecția unui unghi nu pot fi rezolvate cu rigla și compasul.

1882

Lindemann dovedește că nu se poate rezolva cuadratura cercului.

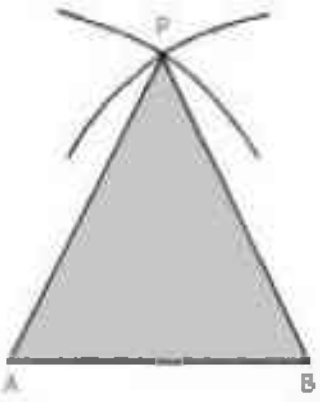
Expresia „cuadratura cercului" este folosită, de obicei, pentru a exprima ceva imposibil. Ecuația algebrică $x^2 - 2 = 0$ are soluțiile specifice $x = \sqrt{2}$ și $x = -\sqrt{2}$. Acestea sunt numere iraționale (nu pot fi scrise ca fracții), dar să arăți că nu se poate rezolva cuadratura cercului se reduce la a arăta că π nu poate fi soluția vreunei ecuații algebrice. Numerele iraționale cu această proprietate se numesc numere transcendentale, deoarece au „un grad mai mare de iraționalitate" decât rudele lor iraționale de tipul lui $\sqrt{2}$.

Matematicienii, în general, credeau că π era număr transcendental, dar această „eternă ghicitoare" a fost greu de demonstrat, până când Ferdinand von Lindemann a folosit o modificare a tehnicii introduse de Charles Hermite. Hermite a folosit-o ca să rezolve problema de mai mică anvergură de a dovedi că baza logaritmilor naturali, *e*, era număr transcendental (vezi p. 26).

După rezultatele lui Lindemann, te-ai fi așteptat să scadă și valul de lucrări publicate de îndărătnicii pasionați de cuadratura cercului. Nici vorbă. La granițele matematicii continuă efervescența celor care nu acceptă logica demonstrației, iar unii nici nu au auzit de ea.

CONSTRUIREA POLIGOANELOR

Euclid a fost cel care a pus problema construirii unui poligon regulat. Acesta este o figură geometrică simetrică, de genul pătratului sau al pentagonului, la care toate laturile sunt egale, iar unghiurile formate de laturile adiacente sunt și ele egale. În celebra lui lucrare *Elementele* (Cartea 4), Euclid a arătat cum pot fi construite poligoane cu 3, 4, 5 și 6 laturi, folosind doar cele două instrumente de bază.



Construirea unui triunghi echilateral

Poligonul cu 3 laturi egale este ceea ce numim, de obicei, triunghi echilateral și, în particular, este foarte ușor de construit. În funcție de cât de mare vreți să fie triunghiul, marcați pe o linie punctele *A* și *B*, cu distanța dorită între ele. Puneți vârful compasului în punctul *A* și trasați un arc din cercul cu raza *AB*. Repetați operațiunea cu vârful compasului în punctul *B*, păstrând aceeași rază. Punctul de intersecție a celor două arce de cerc este *P*. Cum *AP* = *AB* și *BP* = *AB*, toate cele trei laturi ale triunghiului *ABP* sunt egale. Ca să desenăm triunghiul, trasăm cu rigla laturile *AB*, *AP* și *BP*.

Dacă sunteți de părere că este un lux să ai o riglă, nu sunteți singurul – danezul Georg Mohr credea același lucru. Triunghiul echilateral este construit prin găsirea punctului *P*, iar pentru asta e nevoie doar de compas – rigla era folosită doar pentru a uni *fizic* punctele determinate. Mohr a demonstrat că orice construcție care se poate face cu rigla și

compasul poate fi realizată folosind exclusiv compasul. Italianul Lorenzo Mascheroni a demonstrat același lucru, 125 de ani mai târziu. Un aspect inedit al cărții sale din 1797, *Geometria del Compasso*, pe care i-a dedicat-o lui Napoleon, este că a fost scrisă în versuri.

S-a născut un prinț

Carl Friedrich Gauss a fost atât de impresionat de rezultatul lui, care arăta că se poate construi un poligon cu 17 laturi, încât a hotărât să renunțe la planul de a studia limbi străine și să devină matematician. Restul este istorie – Gauss a devenit cunoscut ca „prințul matematicienilor". Poligonul cu 17 laturi este forma bazei memorialului de la Göttingen, Germania, un omagiu foarte potrivit adus geniului său.

Pentru problema generală, sunt importante, în special, poligoanele cu p laturi, unde p este un număr prim. Am construit deja poligonul cu 3 laturi, iar Euclid a construit poligonul cu 5 laturi, dar nu l-a putut construi și pe cel cu 7 laturi (heptagonul). Studiind această problemă la vârsta de 17 ani, un anume Carl Friedrich Gauss a demonstrat negativul. El a dedus că nu este posibil să construiești un poligon cu p laturi pentru $p = 7, 11$ sau 13. Dar Gauss a demonstrat și ceva pozitiv, și anume că este posibil să construiești un poligon cu 17 laturi. De fapt, Gauss a mers și mai departe și a demonstrat că un poligon cu p laturi poate fi construit dacă și numai dacă numărul prim p este de forma

$$p = 2^{2^n} + 1$$

Numerele de această formă se numesc numere Fermat. Dacă le evaluăm pentru $n = 0, 1, 2, 3$ și 4, descoperim că ele sunt numerele prime $p = 3, 5, 17, 257$ și 65 537, iar acestea corespund unor poligoane construibile cu p laturi.

Când încercăm $n = 5$, numărul Fermat este $p = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$. Pierre de Fermat afirmase că numerele de această formă erau prime, însă, din păcate, acesta din urmă nu este prim, pentru că $4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$. Dacă înlocuim în formulă $n = 6$ sau 7, obținem numere Fermat uriașe, însă, la fel ca pentru $n = 5$, nici unul dintre ele nu este prim.

Există alte numere Fermat prime? Părerea acceptată este că nu, însă nimeni nu știe sigur.

Ideea de bază
luați o riglă și un compas...

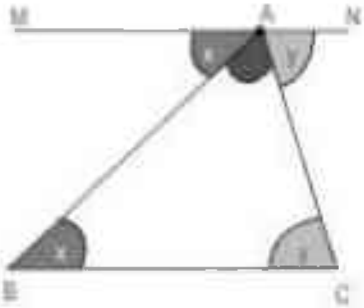
21 Triunghiuri

Faptul cel mai evident la un triunghi este că are trei laturi și trei unghiuri (de unde și numele). Trigonometria este teoria de care ne folosim ca „să măsurăm triunghiul", fie că este vorba despre dimensiunea unghiurilor, despre lungimea laturilor sau despre suprafața interioară. Această formă – una dintre cele mai simple dintre toate figurile geometrice – este, în continuare, de interes.

POVESTEA TRIUNGHIULUI

Există o demonstrație simplă și clară care arată că suma unghiurilor din orice triunghi este egală cu două unghiuri drepte, adică 180°. Prin punctul *A* din „vârful" oricărui triunghi desenați o linie *MAN* paralelă cu baza *BC*.

Unghiul $B\hat{A}C$, pe care o să-l numim *x*, este egal cu unghiul $B\hat{A}M$, pentru că sunt unghiuri alternative, iar *MN* și *BC* sunt paralele. Celelalte două unghiuri alternative sunt egale cu *y*. Unghiul format la vârful A este egal cu 180° (jumătate din 360°), iar acesta este $x + y + z$, care este suma unghiurilor din triunghi. *QED*, cum se scrie deseori la sfârșitul demonstrațiilor. Desigur, presupunem că triunghiul este desenat pe o suprafață plană, cum ar fi o foaie de hârtie. Dacă însumăm unghiurile unui triunghi desenat pe o sferă (un triunghi sferic), rezultatul nu este 180°, dar aceasta este o altă poveste.



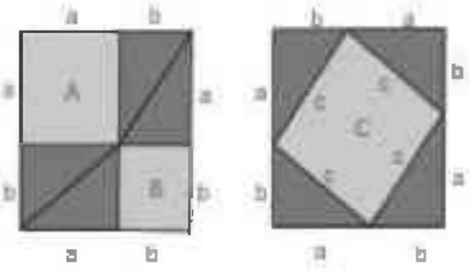
Euclid a demonstrat numeroase teoreme despre triunghiuri, asigurându-se întotdeauna că aceasta se face prin deducție. El a arătat, de exemplu, că „în orice triunghi, oricare două laturi însumate sunt mai mari decât cea de-a treia latură". În zilele noastre, aceasta se cheamă „inegalitatea triunghiului" și este importantă în matematica abstractă. Epicurienii, cu abordarea lor lumească a vieții, pretindeau că nu este nevoie de o demonstrație pentru această afirmație, deoarece era evidentă chiar și pentru un măgar. Dacă se pune o căpiță de fân în vârful unui triunghi și i se dă drumul măgarului din alt vârf al triunghiului, este greu de crezut că măgarul va parcurge două laturi ca să își astâmpere foamea.

CRONOLOGIE

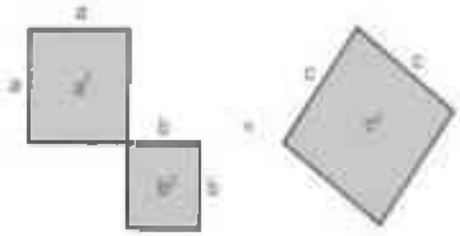
1850 î.Hr.	1335 d.Hr.	1571
Babilonienii cunosc „teorema lui Pitagora".	Richard de Wallingford scrie un tratat de trigonometrie epocal.	François Viète publică o carte despre trigonometrie și tabele trigonometrice.

TEOREMA LUI PITAGORA

Cea mai importantă teoremă legată de triunghiuri este teorema lui Pitagora, care ocupă un loc fundamental în matematica modernă – deşi există dubii că Pitagora ar fi fost primul care a descoperit-o. Cea mai cunoscută formulare a ei este în termeni algebrici, $a^2 + b^2 = c^2$, dar Euclid vorbea despre forma efectivă a pătratelor: „În triunghiurile cu unghi drept, pătratul laturii opuse unghiului drept este egal cu suma pătratelor laturilor care formează unghiul drept”.



Demonstraţia lui Euclid este cuprinsă în Propoziţia 47 din Cartea 1 a Elementelor, o demonstraţie care a devenit motiv de stres pentru generaţii întregi de elevi care s-au străduit să o înveţe, ori să suporte consecinţele. Există câteva sute de demonstraţii. Una dintre preferate este mai degrabă în spiritul lui Bhaskara din secolul al XII-lea decât demonstraţia euclidiană din anul 300 î.Hr.



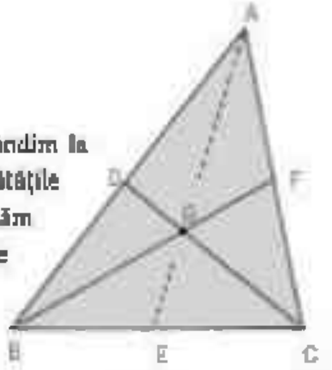
Este o demonstraţie „fără cuvinte”. În figură, pătratul cu latura a + b poate fi divizat în două moduri diferite.

Cum cele patru triunghiuri egale (colorate mai închis) sunt comune ambelor pătrate, le putem înlătura şi avem în continuare egalitatea ariei. Dacă ne uităm la ariile formelor rămase, apare imediat expresia cunoscută:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

DREAPTA LUI EULER

Sunt posibile sute de propoziţii despre triunghiuri. Mai întâi, să ne gândim la punctele de la jumătatea laturilor. În orice triunghi ABC, marcăm jumătăţile laturilor cu D, E şi F. Unim B cu F şi C cu D, iar punctul de intersecţie îl marcăm cu G. Acum, să unim A cu E. Trece şi această linie prin punctul G? Nu este evident că aşa stau lucrurile fără o argumentaţie suplimentară. De fapt, aşa se întâmplă, iar punctul G se numeşte „centroidul” triunghiului. Acesta este centrul de greutate al triunghiului.



Centroidul

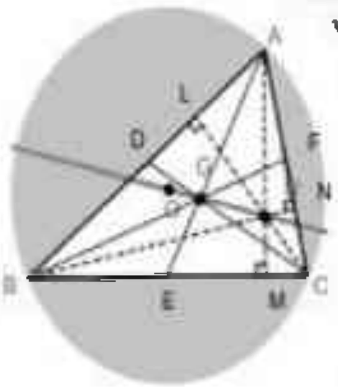
1822

Karl Feuerbach descrie cercul celor nouă puncte dintr-un triunghi.

1873

Brocard îşi publică ampla lucrare despre triunghi.

Fără exagerare, există sute de „centre" diferite care au legătură cu un triunghi. Un altul este punctul H, unde se intersectează înălțimile (liniile trase dintr-un vârf perpendicular pe latura opusă – prezentate ca linii punctate în figura alăturată). Acesta se numește „ortocentru". Există și un alt centru, numit „circumcentru" O, unde se întâlnesc mediatoarele (perpendicularele în punctele D, E și F, reprezentate în figură). Acesta este centrul cercului care poate fi trasat prin A, B și C.



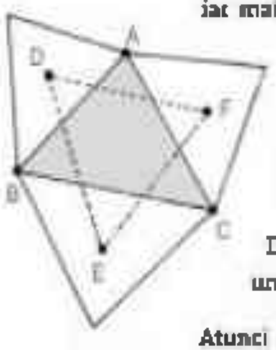
Dreapta lui Euler

Dar mai sunt și altele. În orice triunghi ABC, centrele G, H și O, respectiv centroidul, ortocentrul și circumcentrul sunt așezate pe o dreaptă, numită „dreapta lui Euler". În cazul unui triunghi echilateral (toate laturile de aceeași lungime), aceste trei puncte coincid, iar punctul rezultant este, fără dubiu, centrul triunghiului.

TEOREMA LUI NAPOLEON

Pentru orice triunghi ABC, pe laturile lui se pot construi triunghiuri echilaterale, ale căror centre formează un nou triunghi, DEF. Teorema lui Napoleon afirmă că, pentru orice triunghi ABC, triunghiul DEF este echilateral.

Teorema lui Napoleon a fost tipărită într-o revistă englezească în 1825, la câțiva ani după moartea împăratului pe insula Sf. Elena, în 1821. Priceperea la matematică dovedită de Napoleon ca elev l-a ajutat, fără îndoială, să fie admis la Școala de artilerie, iar mai târziu, când a ajuns împărat, i-a cunoscut la Paris pe cei mai importanți matematicieni. Din nefericire, nu există dovezi care să ducă povestea mai departe și „teorema lui Napoleon" este, ca multe alte realizări matematice, atribuită unei persoane care a avut prea puțin de-a face cu descoperirea sau cu demonstrarea ei. De altfel, este o teoremă care a fost redescoperită și extinsă de mai multe ori.



Teorema lui Napoleon

Datele esențiale care determină un triunghi sunt lungimea unei laturi și două unghiuri. Cu ajutorul trigonometriei, putem determina apoi orice altceva.

Atunci când măsori suprafețe de pământ ca să desenezi hărți, este foarte ușor să lucrezi pe teren plan și să presupui că triunghiurile sunt plane. Se trasează o rețea de triunghiuri începând cu o linie de bază BC de lungime cunoscută, alegând un punct îndepărtat A (punctul de triangulație) și măsurând cu teodolitul unghiurile $A\hat{B}C$ și $A\hat{C}B$. Cu ajutorul trigonometriei, se poate cunoaște totul legat de triunghiul ABC, iar operatorul merge mai departe, fixează următorul punct de triangulație de pe noua linie de bază AB sau AC și repetă operațiunea, ca să stabilească o rețea de triunghiuri. Metoda are avantajul că permite cartarea terenurilor greu accesibile, pe care există bariere naturale, cum ar fi mlaștinile, nisipurile mișcătoare sau râurile.

Aceasta a fost baza folosită pentru Marele Studiu Topografic al Indiei, care a început în jurul anului 1800 și a durat 40 de ani. Obiectivul a fost măsurarea și cartarea de-a lungul

Marelui Arc Meridional, de la capul Comorin în sud până la Himalaya în nord, o distanță de aproape 2 300 km. Ca să fie sigur de acuratețea măsurătorilor, sir George Everest a comandat la Londra două teodolite uriașe, care cântăreau împreună o tonă și era nevoie de o mulțime de oameni pentru transportul lor. A fost esențial pentru măsurarea corectă a unghiurilor. S-a vorbit mult despre acuratețea în măsurare și s-au făcut multe pentru asigurarea ei, dar, până la urmă, umilul triunghi a fost cel care a stat în centrul operațiunilor. Victorienii erau nevoiți să se descurce fără GPS, deși aveau și ei calculatoare – calculatoare umane. Odată ce au fost calculate toate laturile unui triunghi, determinarea ariei este simplă. Din nou, triunghiul este unitatea de bază. Există mai multe formule pentru aria triunghiului, dar cea mai remarcabilă este formula lui Heron din Alexandria:

$$A = \sqrt{s * (s-a) * (s-b) * (s-c)}$$

Poate fi aplicată oricărui triunghi și nici măcar nu trebuie să cunoaștem unghiurile. Simbolul s reprezintă jumătate din perimetrul triunghiului cu laturi de lungimi a, b și c. De exemplu, dacă un triunghi are laturile 13, 14 și 15, perimetrul este 13 + 14 + 15 = 42, așadar s = 21. Completând calculul, $A = \sqrt{(21 \times 8 \times 7 \times 6)} = \sqrt{7056} = 84$. Triunghiul este un obiect cunoscut, fie că vorbim despre copiii care se joacă în nisip cu forme sau despre cercetători care se ocupă zilnic cu inegalitatea triunghiului în matematica abstractă. Trigonometria este baza pentru calculele referitoare la triunghi, iar funcțiile sinus, cosinus și tangentă sunt uneltele necesare ca să facem calcule utile în scopuri practice. Triunghiul s-a bucurat de multă atenție, dar este surprinzător cât de multe așteaptă încă să fie descoperite în ceea ce privește cele trei linii care formează o figură geometrică elementară.

Construind cu triunghiuri

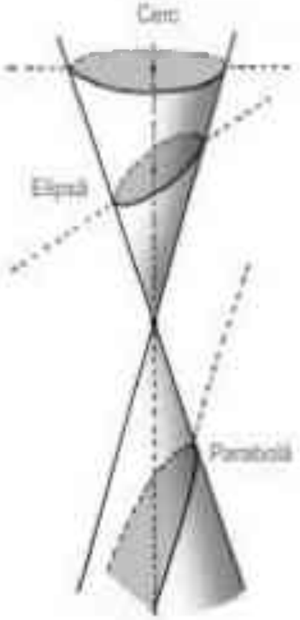
Triunghiul este indispensabil în construcții. Utilitatea și rezistența lui se bazează pe faptul care l-a făcut indispensabil și în trasarea hărților – un triunghi este rigid. Poți deforma un pătrat sau un dreptunghi, însă nu și un triunghi. Grinzile folosite în construcții se obțin prin alipirea de triunghiuri, așa cum vedem și la structurile acoperișurilor. Lovitura a fost dată însă la construcția podurilor.

O grindă Warren poate rezista la o încărcătură mult mai mare decât propria greutate. A fost patentată în 1848 de James Warren, iar primul pod proiectat astfel a fost ridicat la stația London Bridge, doi ani mai târziu. Folosirea triunghiurilor echilaterale s-a dovedit mai potrivită decât cea a triunghiurilor isoscele, triunghiurile cu numai două laturi egale.

Idee de bază
trei laturi ale poveștii

22 Curbe

Este ușor să desenezi o curbă. Artiștii o fac tot timpul; arhitecții schițează prin curba unei semilune silueta unei clădiri noi sau o împrejmuire modernă. Un jucător de baseball aruncă mingea pe o curbă. Fotbaliștii pasează pe traiectorii curbe, iar, când trag la poartă, mingea urmează o curbă. Dacă întrebăm, însă, „Ce este o curbă?", răspunsul nu este ușor de dat.

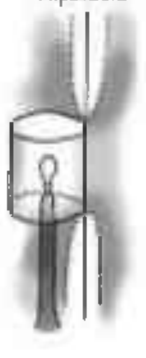


Secțiuni conice

Matematicienii au studiat curbele sute de ani și din multe puncte de vedere. Povestea a început cu grecii, iar curbele pe care aceștia le-au studiat sunt numite acum curbe „clasice".

CURBE CLASICE

Prima familie din domeniul curbelor clasice este formată din ceea ce numim „secțiuni conice". Membrii acestei familii sunt cercul, elipsa, parabola și hiperbola. Conica este formată dintr-un dublu con, două conuri de înghețată puse vârf la vârf, unul cu deschiderea în jos. Dacă facem o secțiune cu o suprafață plană, curbele de intersecție vor fi un cerc, o elipsă, o parabolă sau o hiperbolă, în funcție de înclinarea planului de secțiune față de axa verticală a conului.



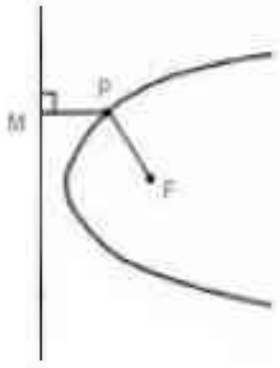
Ne putem gândi la conică la fel ca la proiectarea unui cerc pe un ecran. Razele de lumină emise de un bec într-o veioză cilindrică formează un con dublu de lumină, unde lumina va arunca proiecții ale marginilor circulare de sus și de jos. Imaginea de pe tavan va fi un cerc, dar, dacă înclinăm lampa, cercul va deveni o elipsă. Pe de altă parte, imaginea proiectată pe perete va da curba în două părți, hiperbola.

Conicele pot fi descrise și după modul în care punctele se deplasează în plan. Aceasta este metoda „locus", iubită de greci, și, spre deosebire de definiția

CRONOLOGIE

cca 300 î.Hr.	cca 250 î.Hr.	cca 225 î.Hr.
Euclid definește secțiunile conice	Arhimede studiază spiralele	Apollonius din Perga publică Conicele

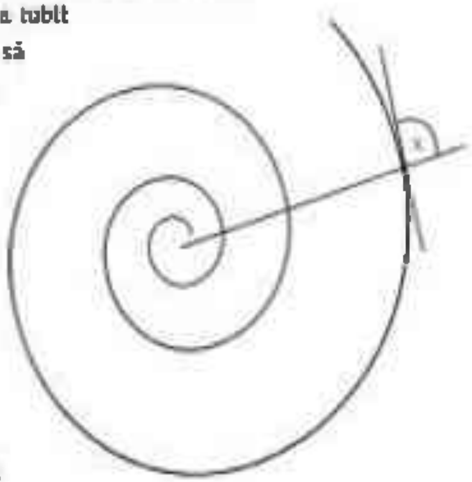
proiectivă, implică și lungimi. Dacă un punct se mișcă astfel încât distanța până la un punct fix să rămână mereu aceeași, obținem un cerc. Dacă un punct se mișcă astfel încât suma distanțelor până la două puncte fixe (focarele) să fie constantă, obținem o elipsă (acolo unde focarele coincid, elipsa devine un cerc). Elipsa a fost cheia pentru descifrarea mișcării planetelor. În 1609, astronomul german Johannes Kepler a anunțat că planetele se mișcă în jurul Soarelui pe elipse, respingând vechea idee a orbitelor circulare.



Parabolă

Mai puțin evident este punctul care se mișcă astfel încât distanța de la el până la un alt punct dat (focarul F) să fie egală cu distanța perpendiculară până la o linie dată (directoarea). În acest caz, obținem o parabolă. Parabola are o mulțime de proprietăți folositoare. Dacă în focarul F este plasată o sursă de lumină, razele de lumină emise sunt toate paralele cu PM. Pe de altă parte, dacă semnalele TV trimise de un satelit lovesc un receptor în formă de parabolă, ele sunt strânse toate în focar și sunt trimise la televizor.

Dacă rotim un băț în jurul unui punct, fiecare capăt al bățului trasează un cerc, dar, dacă unul dintre puncte se poate deplasa spre exterior de-a lungul bățului în timpul rotației, acesta generează o spirală. Pitagora a iubit spiralele și, mult mai târziu, Leonardo da Vinci avea să petreacă zece ani din viață studiind diferite tipuri, în timp ce René Descartes a scris un tratat despre ele. Spirala logaritmică este numită și spirală echiunghiulară, deoarece face același unghi cu o rază și tangenta în care raza întâlnește spirala.


Spirală logaritmică

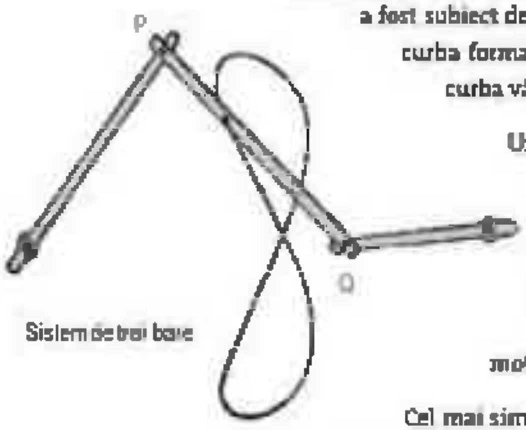
Jacob Bernoulli, din faimosul clan de matematicieni din Elveția, a fost atât de pasionat de spirala logaritmică, încât a vrut să îi fie gravată pe mormântul din Basel. „Renascentistul" Emanuel Swedenborg considera spirala ca fiind cea mai perfectă dintre forme. O spirală tridimensională, care se rotește în jurul unui cilindru, se numește helix. Două forme de acest fel – un dublu helix – formează structura de bază a ADN-ului.

1704 d.Hr.
Newton clasifică curbele cubice.

1890
Peano demonstrează că un pătrat plin este o curbă (curba care umple spațiul).

anii 1920
Menger și Urysohn definesc curbele ca parte a topologiei.

Există numeroase curbe clasice, cum ar fi limaçon, lemniscată și diferite ovale. Cardioidul își datorează numele formei, asemănătoare cu o inimă. Curba catenară a fost subiect de studiu în secolul al XVIII-lea și a fost identificată drept curba formată de un lanț atârnat între două puncte. Parabola este curba văzută la podurile suspendate între doi piloni verticali.



Sistem de trei bare

Un aspect al cercetărilor din secolul al XIX-lea referitoare la curbe a fost cel legat de curbele generate de sistemele mecanice. Acest tip era o extensie a problemei rezolvate aproximativ de inginerul scoțian James Watt, care a proiectat bare articulate astfel încât să transforme mișcarea circulară în mișcare liniară. În epoca motoarelor cu abur, a fost un important pas înainte.

Cel mai simplu dintre aceste mecanisme este sistemul de trei bare, articulate între ele și cu poziții fixe la ambele capete. Atunci când bara de cuplare se mișcă în orice direcție, un punct de pe ea se deplasează pe ceea ce se dovedește a fi o curbă de gradul șase, o „curbă sextică".

CURBELE ALGEBRICE

Datorită lui Descartes, care a revoluționat geometria prin introducerea coordonatelor *x*, *y*, *z* și a axelor carteziene care îi poartă numele, conicele pot fi studiate acum ca ecuații algebrice. De exemplu, cercul de rază 1 are ecuația $x^2 + y^2 = 1$, care este o ecuație de gradul doi, cum sunt toate conicele. S-a dezvoltat astfel o nouă ramură a geometriei, numită geometrie algebrică.

Într-un studiu de importanță majoră, Isaac Newton a clasificat curbele descrise de ecuații algebrice de gradul trei, curbele cubice. În comparație cu cele patru conice de bază, au fost găsite 78 de tipuri, grupate în cinci clase. Explozia numărului de tipuri diferite continuă pentru curbele cuadratice, cu atât de multe tipuri încât nu s-a putut face niciodată o clasificare completă.

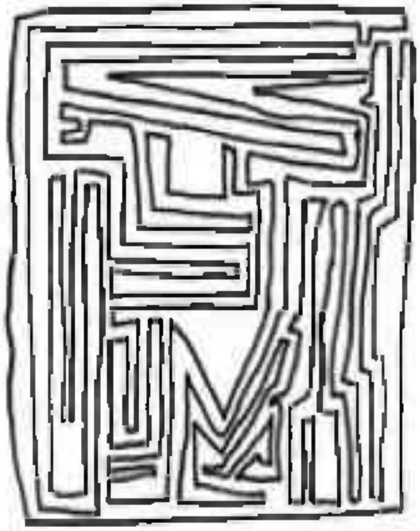
Studiul curbelor ca ecuații algebrice nu este decât o parte. Există multe curbe, cum ar fi catenarele, cicloidele (curbele trasate de un punct de pe o roată care se învârte) și spiralele, care nu sunt ușor de exprimat ca ecuații algebrice.

O DEFINIȚIE

Ceea ce căutau matematicienii era o definiție a curbei propriu-zise, nu doar exemple specifice. Camille Jordan a propus o teorie a curbelor construită pe o definiție a curbei în termenii punctelor variabile.

Iată un exemplu. Dacă $x = t^2$ și $y = 2t$, atunci pentru diferite valori ale lui t obținem diferite puncte pe care le putem descrie prin coordonatele (x, y). De exemplu, dacă

t = 0, obținem punctul (0, 0), t = 1 dă punctul (1, 2) etc. Dacă marcăm aceste puncte într-un sistem de axe x–y și unim punctele, obținem o parabolă. Jordan a dus mai departe această idee a desenării punctelor. Pentru el, aceasta era definiția unei curbe.



O curbă a lui Jordan închisă simplă

Curbele lui Jordan pot fi complicate, chiar și atunci când sunt asemănătoare cu cercul, prin aceea că sunt „simple" (nu se intersectează pe ele însele) și „închise" (nu au nici început, nici sfârșit). Renumita teoremă a lui Jordan are sens. Ea spune că o curbă simplă închisă are un interior și un exterior. În aparență este evident, dar aparența este înșelătoare.

În Italia, Giuseppe Peano a făcut senzație când, în 1890, a arătat că, potrivit definiției lui Jordan, un pătrat plin este o curbă. El a reușit să organizeze punctele dintr-un pătrat astfel încât toate să poată fi trasate simultan, conform definiției lui Jordan. Aceasta a fost numită curba care umple spațiul și a dat o lovitură serioasă definiției lui Jordan – este clar că un pătrat nu este o curbă în sens convențional.

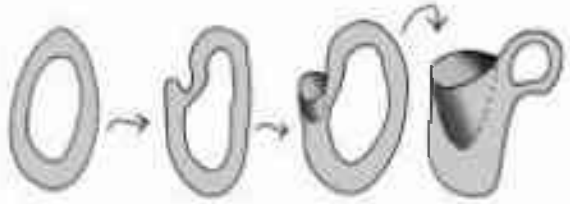
Curbele care umplu spațiul și alte exemple patologice i-au făcut pe matematicieni să se întoarcă din nou la planșa de desenat și să se gândească la fundamentele teoriei curbelor. S-a ridicat, astfel, problema unei definiții mai bune pentru curbe. La începutul secolului XX, această sarcină i-a condus pe matematicieni în noul domeniu al topologiei.

Idee de bază
roată în jurul obstacolului

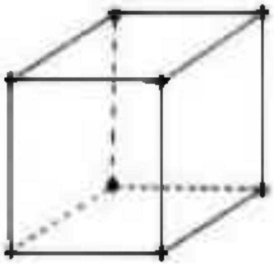
23 Topologie

Topologia este ramura geometriei care se ocupă de proprietățile suprafețelor și ale formelor, în general, fără măsurarea lungimilor sau a unghiurilor. Principalele preocupări vizează acele calități care nu se schimbă atunci când formele sunt transformate în alte forme. Ni se permite să tragem sau să împingem formele în orice direcție, iar, din acest motiv, topologia este descrisă uneori drept „geometria suprafețelor de cauciuc". Topologiștii sunt acei oameni care nu pot să spună ce diferență este între o gogoașă și o cană de cafea.

O gogoașă este o suprafață cu o gaură în ea. O cană de cafea este același lucru, doar că gaura ia forma toartei. Iată cum se poate transforma gogoașa într-o cană de cafea.



CLASIFICAREA POLIEDRELOR



Cele mai elementare forme studiate în topologie sunt poliedrele (*poli* înseamnă „multe", iar *hedra* înseamnă „fețe"). Un exemplu de poliedru este cubul, cu 6 fețe, 8 vârfuri (puncte în care se unesc fețele) și 12 muchii (liniile care unesc vârfurile). Cubul este un poliedru regulat deoarece:

- toate fețele au aceeași formă regulată,
- toate unghiurile dintre laturile care se întâlnesc într-un vârf sunt egale.

Topologia este un subiect relativ nou, dar începutul ei datează încă din antichitatea greacă. *Elementele* lui Euclid culminează cu rezultatul că există exact cinci poliedre regulate. Acestea sunt solidele platonice.

CRONOLOGIE

cca 300 î.Hr.	cca 250 î.Hr.	1752 d.Hr.	1858
Euclid arată că există cinci poliedre regulate	Arhimede studiază poliedrele trunchiate	Euler oferă formula care leagă numărul de vârfuri, muchii și fețe ale unui poliedru	Möbius și Listing prezintă banda Möbius

- tetraedrul (cu 4 fețe triunghiulare)
- cubul (cu 6 fețe pătrate)
- octaedrul (cu 8 fețe triunghiulare)
- dodecaedrul (cu 12 fețe pentagonale)
- icosaedrul (cu 20 de fețe triunghiulare)

Dacă eliminăm condiția ca fețele să fie identice, intrăm în domeniul solidelor arhimedice, care sunt semi-regulate. Exemplele pot fi generate din solidele platonice. Dacă tăiem (trunchiem) unele colțuri ale icosaedrului, obținem forma folosită la proiectarea mingii moderne de fotbal. Cele 32 de fețe sunt 12 pentagoane și 20 de hexagoane. Există 90 de muchii și 60 de vârfuri. Este, de asemenea, forma moleculei de buckminsterfulleren, denumită după vizionarul Richard Buckminster Fuller, creatorul domului geodezic. Aceste „mingiuțe fațetate" sunt o formă nou descoperită de carbon, C_{60}, cu un atom de carbon în fiecare vârf.

Tetraedru

Cub

Octaedru

Dodecaedru

Icosaedru

Icosaedru trunchiat

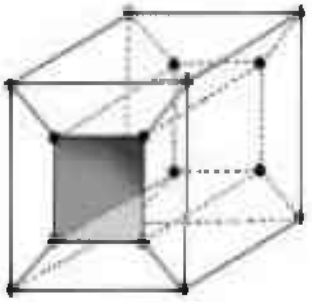
FORMULA LUI EULER

Formula lui Euler spune că, pentru un poliedru, numărul de vârfuri V, cel de muchii M și de fețe F sunt legate prin expresia:

$$V - M + F = 2$$

De exemplu, pentru un cub, V = 8, M = 12 și F = 6, deci V − M + F = 8 − 12 + 6 = 2 și, pentru buckminsterfulleren, V − M + F = 60 − 90 + 32 = 2. Această teoremă este, de altfel, o provocare la însăși ideea de poliedru.

Dacă un cub are „un tunel" prin el, mai este un poliedru? Pentru această formă, V = 16, M = 32, F = 16, iar V − M + F = 16 − 32 + 16 = 0. Formula lui Euler nu funcționează. Pentru a păstra corectitudinea formulei, tipul de poliedru ar putea fi limitat la cele fără tunele. Sau formula ar putea fi generalizată, ca să includă și această particularitate.


Cubul cu un tunel

1961
Stephen Smale demonstrează conjectura Poincaré în dimensiuni mai mari decât 4.

1982
Michael Freedman demonstrează conjectura Poincaré în dimensiunea egală cu 4.

2002
Perelman demonstrează conjectura Poincaré în dimensiunea 3.

CLASIFICAREA SUPRAFEȚELOR

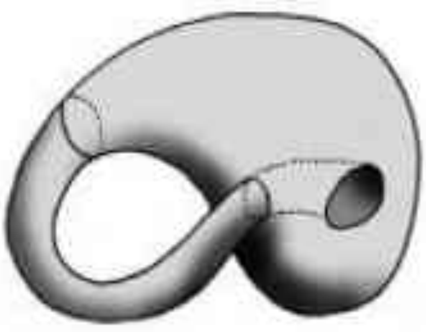
Un topologist ar putea să privească o gogoașă și o cană de cafea ca fiind identice, dar ce fel de suprafață este diferită de gogoașă? Un posibil candidat este mingea de cauciuc. Nu există nici o modalitate de a transforma gogoașa într-o minge, deoarece gogoașa are o gaură, dar mingea nu. Aceasta este diferența fundamentală dintre cele două suprafețe. Așadar, o posibilitate de clasificare a suprafețelor ar fi după numărul de găuri pe care le conțin.

Să luăm o suprafață cu r găuri și să o împărțim în segiuni mărginite de muchii care se întâlnesc în vârfuri plasate pe supsafață. Odată ce am făcut asta, putem număra fețele, muchiile și vârfurile. Pentru orice împărțire, expresia lui Euler $V - M + F$ are întotdeauna aceeași valoare, numită caracteristica Euler a suprafeței:

$$V - E + F = 2 - 2r$$

Dacă suprafața nu are găuri ($r = 0$), cum este cazul poliedrului obișnuit, formula se reduce la cea a lui Euler, $V - M + F = 2$. În cazul unei găuri ($r = 1$), este exemplul cubului cu un tunel, $V - M + F = 0$.

BandăMobius



SticlăKlein

SUPRAFEȚE CU O SINGURĂ FAȚĂ

De obicei, o suprafață are două fețe. Exteriorul unei mingi este diferit de interior și singura posibilitate de a trece de pe o față pe alta constă în a face o gaură în minge – o operațiune de tăiere care nu este permisă în topologie (poți să întinzi, dar nu poți tăia). O coală de hârtie este un alt exemplu de suprafață cu două fețe. Singurul loc unde o față o întâlnește pe cealaltă este de-a lungul curbei de delimitare formate din marginile foii.

Ideea unei suprafețe cu o singură față pare oarecum forțată. Și, totuși, o suprafață celebră a fost descoperită de matematicianul și astronomul german August Möbius, în secolul al XIX-lea. O astfel de suprafață se construiește luând o bandă de hârtie pe care o răsucim o singură dată și apoi lipim capetele. Rezultatul este o „bandă Möbius", o suprafață cu o singură față și cu o curbă de delimitare. Luați un creion și începeți să trageți o linie de-a lungul benzii. Nu va trece mult și veți ajunge de unde ați plecat!

Este posibil chiar să avem o suprafață cu o singură față și care nu are curbă de delimitare. Aceasta este „sticla Klein", denumită după matematicianul german Felix Klein. Ce impresionează, în mod special, la această sticlă

este că ea nu se intersectează pe sine. Totuși, nu este posibil să facem un model al sticlei Klein în spațiul tridimensional fără o intersecție fizică, deoarece locul propriu-zis al acestui obiect este în spațiul cvadridimensional, unde nu ar avea deloc intersecții.

Aceste două suprafețe sunt exemple de varietăți topologice – suprafețe geometrice care arată și se comportă la fel ca suprafețele din spațiul euclidian doar local, pe porțiuni mici, nu și în ansamblu. Cum sticla lui Klein nu are nici o muchie, se numește varietate topologică închisă.

CONJECTURA POINCARÉ

Pentru mai mult de un secol, o problemă răsunătoare a topologiei a fost faimoasa conjectură Poincaré, denumită după Henri Poincaré. Conjectura are în centru legătura dintre algebră și topologie.

Acea parte a conjecturii care a rămas până nu demult nerezolvată se aplica varietăților topologice închise cu 3 dimensiuni. Acest lucru poate fi complicat – imaginați-vă o sticlă Klein cu o dimensiune suplimentară. Poincaré a afirmat că anumite varietăți tridimensionale închise, care ar avea toate caracteristicile algebrice ale unor sfere tridimensionale, trebuiau să fie, de fapt, sfere. Este ca și cum v-ați plimba în jurul unei bile uriașe și toate indiciile v-ar spune că este o sferă, însă, din cauză că nu puteți vedea imaginea de ansamblu, vă întrebați, totuși dacă este cu adevărat o sferă.

Nimeni nu a putut demonstra conjectura Poincaré pentru varietăți topologice tridimensionale. Era adevărată sau era falsă? Fusese demonstrată pentru toate celelalte dimensiuni, dar varietățile tridimensionale rezistau cu încăpățânare. Au fost multe demonstrații false până în 2002, când Grigori Perelman de la Institutul Steklov din Sankt Petersburg a reușit, în sfârșit, să o demonstreze. La fel ca soluțiile altor mari probleme din matematică, tehnica de rezolvare a conjecturii Poincaré se afla undeva în imediata ei vecinătate, într-o tehnică legată de difuzia căldurii.

Idee de bază
de la gogoși la căni de cafea

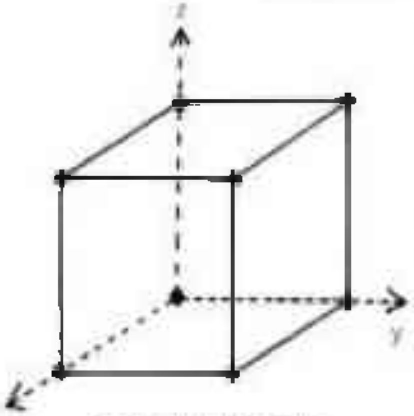
24 Dimensiune

Leonardo da Vinci a scris, în caietele lui: „Știința picturii începe cu un punct, apoi vine linia, al treilea vine planul și al patrulea este corpul, în veșmintele lui de planuri". În ierarhia lui da Vinci, punctul are dimensiunea zero, linia este unidimensională, planul este bidimensional și spațiul este tridimensional. Ce ar putea fi mai evident? Este modul în care punctul, linia, planul și geometria în spațiu au fost făcute cunoscute de geometrul grec Euclid, iar Leonardo urma reprezentarea lui Euclid.

Că spațiul fizic este tridimensional a fost concepția generală multe vreme de-a rândul. În spațiul fizic ne putem deplasa de-a lungul acestei pagini pe axa x, de-a latul ei, pe orizontală, pe axa y, sau vertical în sus pe axa z, dar și pe orice combinație a acestora. Față de origine (unde se întâlnesc cele trei axe), fiecare punct are un set de coordonate spațiale specificate prin valorile lui x, y și z și scrise sub forma:

$$(x, y, z)$$

Un cub are evident aceste trei dimensiuni și la fel orice corp cu volum. La școală ni se predă, de obicei, geometria planului, care este bidimensional, apoi trecem la trei dimensiuni – la geometria „în spațiu" – și ne oprim acolo.



Spațiul cu trei dimensiuni

Pe la începutul secolului al XIX-lea, matematicienii au început să lucreze în patru dimensiuni și chiar mai mult, în n dimensiuni. Mulți filosofi și matematicieni au început să se întrebe dacă există mai multe dimensiuni.

DIMENSIUNI FIZICE SUPERIOARE

Mulți matematicieni de frunte credeau că patru dimensiuni sunt de neimaginat. Ei puneau sub semnul întrebării realitatea celei de-a patra dimensiuni și a devenit o provocare să explice existența acesteia.

CRONOLOGIE

cca 300 î.Hr.
Euclid descrie o lume tridimensională.

1877 d.Hr.
Cantor este surprins de controversatele lui descoperiri în teoria dimensiunilor.

1909
Lucrările lui Brouwer schimbă noțiunea cunoscută de dimensiune.

O modalitate obișnuită de a explica de ce sunt posibile patru dimensiuni constă în întoarcerea la două dimensiuni. În 1884, institutorul și teologul englez Edwin Abbott a publicat o carte foarte populară despre „platlanderi" care trăiau într-un plan bidimensional. Ei nu puteau vedea triunghiurile, pătratele sau cercurile care existau în Platland, pentru că nu puteau ieși în cea de-a treia dimensiune, ca să le observe. Viziunea lor era extrem de limitată. Când se gândeau la a treia dimensiune, aveau aceleași probleme de care ne lovim noi când ne gândim la a patra. Dar lectura lui Abbott ne oferă cadrul mental pentru a accepta a patra dimensiune.

Necesitatea de a examina existența efectivă a spațiului cvadridimensional a devenit mai stringentă când a intrat în scenă Einstein. Geometria în patru dimensiuni a devenit mai plauzibilă, și chiar de înțeles, deoarece dimensiunea suplimentară din modelul lui Einstein este timpul. Spre deosebire de Newton, Einstein concepea timpul ca fiind legat de spațiu într-un continuum cvadridimensional spațiu-timp. Einstein a decretat că trăim într-o lume cvadridimensională cu patru coordonate (*x*, *y*, *z*, *t*), unde *t* desemnează timpul.

În zilele noastre, lumea în patru dimensiuni a lui Einstein pare destul de domestică și de familiară. Un model mai recent al realității fizice este bazat pe „corzi vibrante". În această teorie, particulele subatomice cunoscute, electronii, de exemplu, sunt manifestări ale unor corzi vibrante extrem de mici. Teoria corzilor vibrante sugerează o înlocuire a continuumului spațiu-timp cvadridimensional cu o versiune în mai multe dimensiuni. Cercetarea actuală sugerează că dimensiunea adecvată continuumului spațiu-timp pentru teoria corzilor vibrante ar trebui să fie 10, 11 sau 26, în funcție de alte presupuneri și de diferite puncte de vedere.

La rezolvarea problemei ar putea să ajute uriașul magnet de 2 000 de tone instalat la CERN, lângă Geneva, în Elveția, și destinat să genereze ciocniri ale particulelor la viteze înalte. Se încearcă, astfel, să se descopere structura materiei și, ca produs derivat, s-ar putea să se ajungă la o teorie mai bună și la un răspuns „corect" în privința dimensionalității. Un pariu cu șanse mari de câștig ar fi că trăim într-un univers cu 11 dimensiuni.

HIPERSPAȚIU

Spre deosebire de dimensiunile fizice superioare, nu există absolut nici o problemă cu un *spațiu matematic* cu mai mult de trei dimensiuni. Spațiul matematic poate avea orice număr de dimensiuni. De la începutul secolului al XIX-lea, a devenit ceva obișnuit

1919

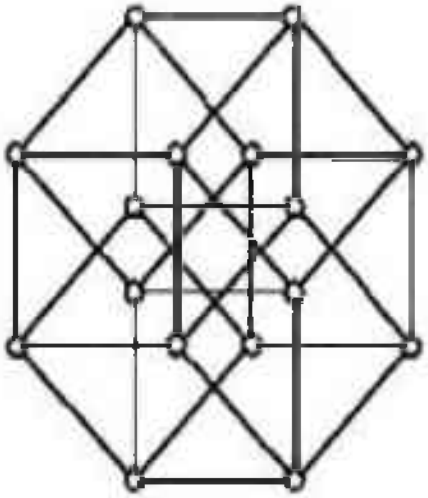
Hausdorff introduce noțiunea de „dimensiune Hausdorff" fracțională

1970

Teoria corzilor vibrante concepe universul nostru ca având 10, 11 sau 26 de dimensiuni.

pentru matematicieni să folosească *n* variabile în lucrările lor. George Green, un morar din Nottingham care a studiat matematica electricității, și matematicienii A.L. Cauchy, Arthur Cayley și Hermann Grassmann și-au scris lucrările în termenii hiperspațiului *n*-dimensional. Părea să nu existe nici un motiv rezonabil pentru care să se limiteze matematica și era mult de câștigat în eleganță și claritate.

Ideea din spatele celor *n* dimensiuni este o simplă extensie a coordonatelor tridimensionale (x, y, z) la un număr nespecificat de variabile. Un cerc în două dimensiuni are o ecuație $x^2 + y^2 = 1$, o sferă în trei dimensiuni are o ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, așadar, de ce n-ar avea o hipersferă în patru dimensiuni cu ecuația $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$?


Cubul cvadridimensional

Cele opt colțuri ale unui cub în trei dimensiuni au coordonate de forma (x, y, z), unde fiecare dintre x, y și z sunt 0 sau 1. Cubul are șase fețe, fiecare un pătrat, și sunt $2 \times 2 \times 2 = 8$ colțuri. Dar, dacă am avea un cub cvadridimensional? El va avea coordonate de forma (x, y, z, w), unde fiecare dintre x, y, z și w sunt sau 0, sau 1. Cubul cvadridimensional are totodată $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ posibile colțuri și opt fețe, dintre care fiecare este un cub. Nu putem vedea efectiv acest cub cvadridimensional, dar putem crea o versiune artistică pe această foaie de hârtie. Aceasta reprezintă o proiecție a cubului cvadridimensional care există în imaginația matematicianului. Fețele cubice pot fi percepute oarecum.

Un spațiu matematic cu multe dimensiuni este ceva destul de obișnuit pentru cei care se ocupă cu matematica pură. Nimeni nu a pretins că el ar exista în realitate, dar se poate presupune că există într-o lume platonică ideală. În marea problemă a clasificării grupurilor, de exemplu (vezi p. 155), „grupul monstru" este o modalitate de a măsura simetria într-un spațiu matematic cu 196 883 de dimensiuni. Nu putem „vedea" acest spațiu așa cum vedem spațiul tridimensional obișnuit, dar el poate fi imaginat și se poate opera cu el foarte precis în algebra modernă.

Preocuparea matematicienilor pentru dimensiuni este cu totul separată de înțelesul pe care îl dau fizicienii analizei dimensionale. Unitățile obișnuite din fizică sunt măsurate în termeni de masă *M*, lungime *L* și timp *T*. Astfel, folosind analiza dimensională, un fizician poate verifica dacă ecuațiile au sens, de vreme ce ambele părți ale ecuației trebuie să aibă aceleași dimensiuni.

Nu ajunge să ai forța = viteza. O analiză dimensională dă viteza în metri pe secundă, adică dimensiuni de lungime împărțite la timp, sau $^{L}/_{T}$, pe care o putem scrie ca

LT^{-1}. Forța este masa înmulțită cu accelerația, care, la rândul ei, este exprimată în metri pe secundă, rezultatul fiind că forța trebuie să aibă dimensiunile MLT^{-2}.

Oameni cu coordonate

Oamenii sunt ei înșiși ființe multidimensionale. Un om are mult mai multe „coordonate" decât trei. Am putea folosi [a, b, c, d, e, f, g, h] pentru vârstă, înălțime, greutate, sex, mărime la pantofi, culoarea ochilor, culoarea părului, naționalitate etc. În locul punctelor geometrice putem avea oameni. Dacă ne limităm la acest „spațiu" de oameni în opt dimensiuni, John Doe ar putea avea coordonatele [43 de ani, 165 cm, 83 kg, bărbat, 40, albaștri, blond, danez], iar coordonatele lui Mary Smith ar putea fi [26 de ani, 157 cm, 58 kg, femeie, 36, căprui, brunetă, englezoaică].

TOPOLOGIE

Teoria dimensiunilor este parte a topologiei generale. Se pot defini independent și alte concepte de dimensiune, în termenii spațiilor matematice abstracte. O problemă majoră constă în a arăta cum se raportează unele la altele. Savanți de frunte din numeroase ramuri ale matematicii s-au aplecat asupra înțelesului dimensiunii, printre ei numărându-se Henri Lebesgue, L.E.J. Brouwer, Carl Menger, Pavel Urysohn și Leopold Vietoris (cea mai vârstnică persoană din Austria în 2002, când a decedat la vârsta de 110 ani).

Principala carte despre acest subiect a fost *Teoria dimensiunii*. Publicată în 1948 de Witold Hurewicz și Henry Wallman, este considerată și acum un reper în înțelegerea conceptului de dimensiune.

DIMENSIUNEA ÎN TOATE FORMELE EI

De la cele trei dimensiuni introduse de greci, conceptul de dimensiune a fost permanent analizat critic și extins.

Cele *n* dimensiuni ale spațiului matematic au fost introduse aproape fără probleme, în timp ce fizicienii și-au bazat teoriile pe spațiu-timp (de dimensiune patru) și pe mai recenta teorie a corzilor vibrante (vezi p. 97), care cere 10, 11 și 26 de dimensiuni. S-au făcut explorări și în dimensiunile fracționale, cu formele fractalice (vezi p. 100), unde au fost studiate câteva valori. Hilbert a introdus un spațiu matematic infinit dimensional, care este astăzi una dintre bazele studiilor de matematică pură. Dimensiunea este mult mai mult decât acel unu, doi, trei din geometria euclidiană.

Idee de bază
dincolo de a treia dimensiune

25 Fractali

În martie 1980, ultramodernul computer mainframe de la centrul de cercetare IBM de la Yorktown Heights, statul New York, transmitea instrucțiuni unei vechi imprimante Tektronix. Aceasta a printat conștiincios puncte în locuri bizare pe foaia albă și, când clincănitul s-a oprit, rezultatul arăta ca o mână de praf împrăștiat pe hârtie. Benoit Mandelbrot s-a frecat la ochi, neîncrezător. Și-a dat seama că vedea ceva important, dar ce era asta? Imaginea care i se înfățișa lent arăta ca o fotografie alb-negru ieșind din baia de developare. Era o primă privire aruncată unei vedete din lumea fractalilor – mulțimea Mandelbrot.

Aceasta era matematică experimentală prin excelență, o abordare a subiectului în care matematicienii intrau în laborator exact ca fizicienii și chimiștii. Și ei puteau face experimente. Noi căi li se deschideau înainte – la propriu. Era o evadare din tărâmul arid al lui „definiție, teoremă, demonstrație", deși, nu peste mult timp, avea să vină și întoarcerea la rigoarea argumentației raționale.

Dezavantajul acestei abordări experimentale era că imaginile vizuale precedau baza teoretică. Experimentatorii navigau fără hartă. Mandelbrot a creat cuvântul „fractali", dar ce erau aceștia? Putea fi formulată pentru ei o definiție precisă, în stilul obișnuit al matematicii? La început, Mandelbrot nu a vrut să facă asta. Nu voia să spulbere magia experienței cu o definiție exactă, care putea fi inadecvată și limitativă. Simțea că noțiunea de fractal, „la fel ca un vin bun, trebuia să se învechească un pic înainte să fie închisă într-o sticlă".

MULȚIMEA MANDELBROT

Mandelbrot și colegii lui nu erau niște matematicieni foarte greu de înțeles. Ei se jucau cu cele mai simple formule. Experimentele lor se bazau pe iterație – practica aplicării repetitive a unei formule. Formula care a generat mulțimea Mandelbrot era, pur și simplu, $x^2 + c$.

CRONOLOGIE

1879
Cayley lucrează la un precursor al fractalilor moderni.

1904
Von Koch creează curba fulg de zăpadă care îi poartă numele.

1918
Hausdorff introduce conceptul lui de dimensiune fracționară.

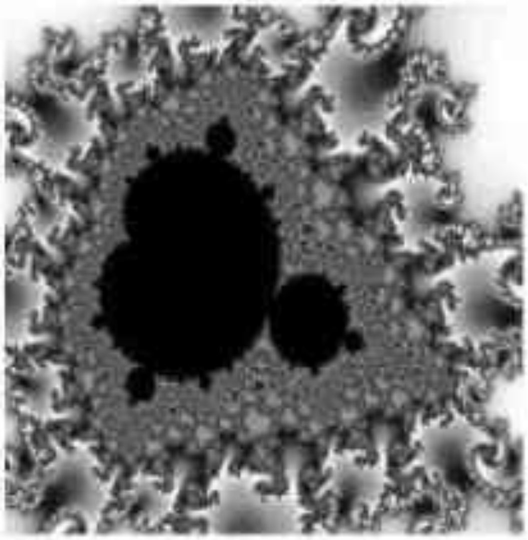
Primul lucru pe care îl facem este să alegem o valoare pentru c. Să luăm $c = 0,5$. Începând cu $x = 0$, îl substituim în formula $x^2 + 0,5$. Acest prim calcul ne dă iarăşi 0,5. Folosim acum această valoare pentru x şi înlocuim în $x^2 + 0,5$ ca să obţinem a doua valoare: $(0,5)^2 + 0,5 = 0,75$. Continuăm în acelaşi mod şi, la al treilea pas, $(0,75)^2 + 0,5 = 1,0625$. Toate aceste calcule pot fi făcute cu un calculator de buzunar. Dacă mergem mai departe, vom descoperi că rezultatul devine din ce în ce mai mare.

Să încercăm o altă valoare pentru c, de această dată $c = -0,5$. Ca şi înainte, începem cu $x = 0$ şi îl substituim în $x^2 - 0,5$ ca să obţinem $-0,5$. Continuăm şi obţinem $-0,25$, dar de data aceasta, valorile nu devin din ce în ce mai mari, ci, după o oarecare oscilaţie, se stabilizează la o valoare apropiată de $-0,3660$...

Aşadar, dacă alegem $c = 0,5$ secvenţa care începe cu $x = 0$ creşte spre infinit, dar, dacă alegem $c = -0,5$ descoperim că secvenţa care începe la $x = 0$ converge, de fapt, spre o valoare apropiată de $-0,3660$. Mulţimea Mandelbrot este formată din toate acele valori ale lui c pentru care secvenţa care începe cu $x = 0$ nu evoluează spre infinit.

Aceasta nu este decât o parte a poveştii, deoarece până acum am luat în considerație doar şirul unidimensional al numerelor reale – care ne dă o mulţime Mandelbrot unidimensională, la care nu sunt prea multe de văzut. Ceea ce trebuie să facem este să folosim aceeaşi formulă, $z^2 + c$, dar unde z şi c sunt două numere complexe, bidimensionale (vezi p. 32). Aceasta ne va da o mulţime Mandelbrot bidimensională.

Pentru unele valori ale lui c din mulţimea Mandelbrot, secvenţa de numere z poate face tot felul de lucruri ciudate, cum ar fi să „danseze" între anumite puncte, însă fără să „fugă" spre infinit. În mulţimea Mandelbrot vedem şi o altă proprietate a fractalilor, şi anume autosimilaritatea. Dacă măreşti şi priveşti de aproape un fragment din mulţime, nu poţi fi sigur niciodată de nivelul de mărire, pentru că tot ceea ce vezi sunt alte mulţimi Mandelbrot.



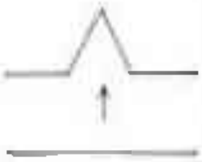
Mulţimea Mandelbrot

1919 Julia şi Fatou investighează structurile fractale în planul complex.

1975 Mandelbrot introduce termenul de fractal.

ÎNAINTE DE MANDELBROT

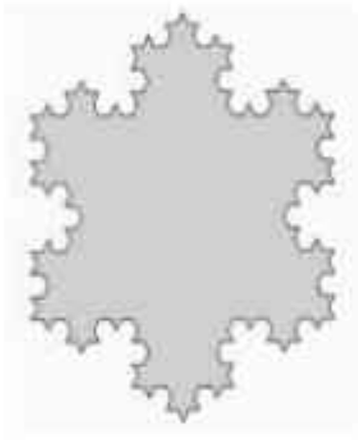
Ca în cele mai multe cazuri din matematică, o descoperire este rareori nou-nouță. Căutând în istorie, Mandelbrot a descoperit că matematicieni ca Henri Poincaré și Arthur Cayley avuseseră aceeași idee cu o sută de ani înaintea lui. Din nefericire, ei nu au avut la dispoziție puterea de calcul a computerelor, ca să cerceteze mai departe.



Element care generează fulgul de zăpadă Koch

Formele descoperite de primul val de teoreticieni ai fractalilor includeau curbe „șifonate" și curbe „monstru", respinse anterior ca fiind exemple patologice de curbe. Erau atât de ciudate încât au fost aruncate în podul cu vechituri al matematicii și li s-a dat prea puțină atenție. Ceea ce se dorea la vremea respectivă erau mult mai normalele curbe „potolite", care puteau fi abordate cu ajutorul calculului diferențial. Odată cu popularitatea fractalilor, au fost „dezgropate" și cercetările matematicienilor Gaston Julia și Pierre Fatou, care lucraseră cu structuri asemănătoare fractalilor în planul complex, în anii ce au urmat Primului Război Mondial. Curbele lor nu erau numite fractali, desigur, și nici nu avuseseră echipamentul tehnologic ca să le vadă formele.

ALȚI FRACTALI CELEBRI

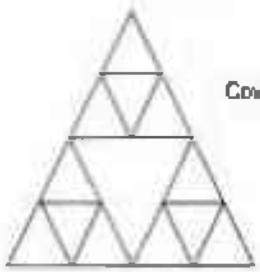


Fulgul de zăpadă Koch

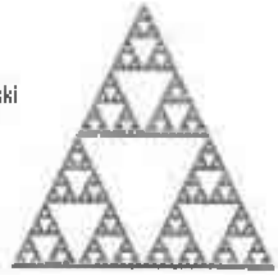
Faimoasa curbă Koch este numită după matematicianul suedez Niels Fabian Helge von Koch. Curba fulgului de zăpadă este practic prima curbă fractalică. Este generată pornind de la latura unui triunghi tratată ca un element, împărțită în trei părți, fiecare de lungime $^1/_3$, și adăugând un triunghi în poziția din mijloc.

Proprietatea ciudată a curbei lui Koch este că are o suprafață finită, deoarece rămâne întotdeauna în interiorul unui cerc, dar lungimea ei crește la fiecare etapă de generare. Este o curbă care rămâne într-o suprafață finită, dar are o circumferință „infinită"!

Un alt fractal celebru este denumit după matematicianul polonez Waclaw Sierpiński. Este realizat prin inscrierea de triunghiuri într-un triunghi echilateral și, prin continuarea acestui proces, obținem covorul lui Sierpiński (generat printr-un proces diferit la p. 54).



Covorul lui Sierpiński



DIMENSIUNE FRACȚIONALĂ

Modul în care Felix Hausdorff a abordat dimensiunea a fost inovator. Avea de-a face cu mărirea la scară. Dacă un segment de dreaptă este mărit cu factorul 3, atunci este de 3 ori mai lung decât era înainte. Cum $3 = 3^1$, spunem despre acel segment că are dimensiunea 1. Dacă un pătrat este mărit cu factorul 3, atunci aria lui va fi de 9 ori mai mare decât înainte și, cum $9 = 3^2$, dimensiunea este 2. Dacă mărim cu același factor un cub, volumul crește de 27 de ori, sau 3^3, așadar dimensiunea este 3. Aceste valori ale dimensiunii Hausdorff coincid, toate, cu așteptările noastre pentru un segment de dreaptă, un pătrat sau un cub.

Dacă unitatea de bază a curbei Koch este mărită cu factorul 3, ea devine de 4 ori mai lungă decât era înainte. Urmând schema descrisă, dimensiunea Hausdorff este valoarea lui D pentru care $4 = 3D$. Un calcul alternativ dă

$$D = \frac{\log 4}{\log 3}$$

ceea ce înseamnă că D pentru curba Koch este aproximativ 1,262. În cazul fractalilor, se întâmplă frecvent ca dimensiunea Hausdorff să fie mai mare decât dimensiunea obișnuită, care este 1 în cazul curbei Koch.

Dimensiunea Hausdorff a inspirat definiția dată de Mandelbrot fractalilor – un set de puncte a căror valoare D nu este un număr întreg. Dimensiunea fracțională a devenit o proprietate-cheie a fractalilor.

APLICAȚII ALE FRACTALILOR

Potențialul pentru aplicații al fractalilor este foarte larg. Fractalii ar putea foarte bine să fie mediul matematic care modelează procese din natură, cum ar fi creșterea plantelor sau formarea norilor.

Fractalii au fost deja aplicați la creșterea unor organisme marine, de tipul coralilor și bureților. S-a arătat și că extinderea orașelor moderne are similarități cu creșterea fractalilor. În medicină, fractalii și-au găsit aplicație în modelarea activității creierului. Natura fractalică a evoluției stocurilor și acțiunilor la bursă a fost investigată, de asemenea. Cercetările lui Mandelbrot au deschis un nou drum și mai sunt multe de descoperit.

Idee de bază
forme cu dimensiune fracțională

26 Haos

Cum este posibil să existe o teorie a haosului? Nu este cert că haosul apare în absența oricărei teorii? Povestea se întoarce în timp până în 1812. În timp ce Napoleon înainta spre Moscova, compatriotul lui, marchizul Pierre-Simon de Laplace, a publicat un eseu despre universul determinist: dacă, la un moment dat, ar fi cunoscute pozițiile și vitezele tuturor obiectelor din univers, precum și forțele care acționează asupra lor, atunci aceste cantități ar putea fi calculate exact pentru toate momentele viitoare. Universul și toate obiectele din el ar fi complet determinate. Teoria haosului ne arată că lumea este mai complicată de atât.

În lumea reală, nu putem cunoaște exact toate pozițiile, vitezele și forțele, dar corolarul convingerii lui Laplace este că, și dacă am ști valorile aproximative la un moment dat, oricum universul nu ar fi prea diferit. Părerea comună era că mici discrepanțe în condițiile inițiale însemnau mici discrepanțe în rezultatele finale. Teoria haosului a spulberat această idee.

EFECTUL FLUTURELUI

Efectul fluturelui arată cum condiții inițiale ușor diferite de cele date pot genera, în realitate, un rezultat foarte diferit de predicții. Prognoza meteo poate anunța într-o zi vreme frumoasă în Europa, dar un fluture bate din aripi în America de Sud și aceasta poate provoca furtuni în cealaltă parte a lumii, deoarece bătaia din aripi a fluturelui schimbă – chiar dacă foarte puțin – presiunea aerului, provocând o evoluție a vremii complet diferită de prognoza inițială.

Putem ilustra ideea cu un experiment mecanic simplu. Dacă lăsați o bilă să cadă printr-o cutie cu ace, ea se va deplasa în jos, deviată într-o parte sau alta de acele pe care le întâlnește în cale, până când ajunge într-una din zonele delimitate de la bază. Puteți încerca să lăsați apoi să cadă o bilă identică, din aceeași poziție și cu exact aceeași viteză. Dacă ați putea face asta, marchizul de Laplace ar avea dreptate și calea urmată de bilă ar fi exact aceeași. Dacă prima bilă a căzut în a treia zonă din dreapta, atunci la fel ar trebui să cadă și a doua bilă.

CRONOLOGIE

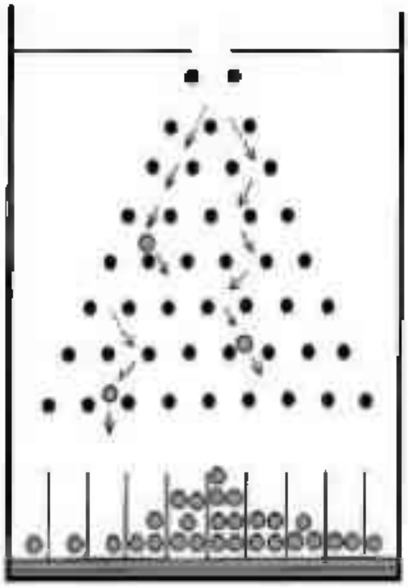
1812

Laplace își publică eseul despre o lume deterministă.

1889

Poincaré se lovește de chestiunea haosului în lucrarea sa despre problema celor trei corpuri, pentru care este premiat de regele Oscar al Suediei.

Bineînțeles, însă, că nu vă stă în puteri să lăsați bila să cadă din exact aceeași poziție, cu exact aceeași viteză și forță. În realitate, vor exista diferențe atât de mici, încât s-ar putea să nu fiți capabil să le măsurați. Rezultatul este că bila ar putea să o ia pe un drum cu totul diferit până la bază și să sfârșească în altă zonă.

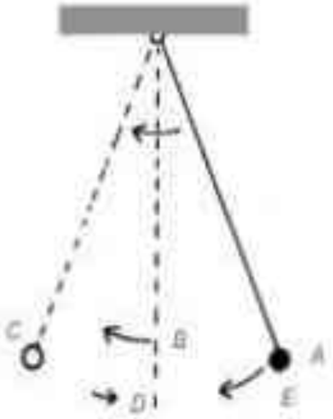


Experimentul cutiei cu ace

UN SIMPLU PENDUL

Pendulul gravitațional este unul dintre sistemele mecanice cel mai simplu de analizat. Pe măsură ce pendulul oscilează într-o parte și în alta, el pierde energie. Deplasarea față de verticală și viteza maximă a bilei scad, până când aceasta ajunge să stea pe loc.

Mișcarea bilei poate fi reprezentată grafic într-o diagramă de fază. Pe axa orizontală măsurăm deplasarea față de verticală, iar pe axa verticală măsurăm viteza. Punctul de eliberare a pendulului este marcat cu A pe axa orizontală pozitivă. În punctul A, deplasarea este maximă și viteza este zero. Când bila trece prin axa verticală (unde deplasarea este zero), viteza este maximă, iar aceasta corespunde pe diagramă punctului B. În punctul C, unde bila este la cealaltă extremă a oscilației ei, deplasarea este negativă și viteza este zero. După aceea, bila revine prin punctul D (prin care trece în direcție opusă, așadar viteza este negativă) și întregește o oscilație în punctul E. În diagrama de faze, aceasta este reprezentată printr-o rotație de 360°, însă, deoarece amplitudinea scade, punctul E este reprezentat în interior față de A. Pe măsură ce pendulul se deplasează din ce în ce mai puțin, pe diagramă se conturează o spirală care se strânge spre origine până când, în cele din urmă, pendulul se oprește.



Pendulul gravitațional

Acesta nu este și cazul pendulului dublu, unde greutatea se află la capătul unei perechi de bare articulate. Dacă deplasarea este mică, mișcarea pendulului dublu este similară celei a pendulului simplu, dar, dacă deplasarea este mare, greutatea se balansează, se rotește și se împleticește, iar articulația intermediară pare să se miște la întâmplare.

1961 Lorenz observă efectul fluturelui

1971 Robert May studiază haosul în modelul populației

2004 Teoria haosului ajunge în cultura populară prin filmul *The Butterfly Effect* (*Efectul fluturelui*).

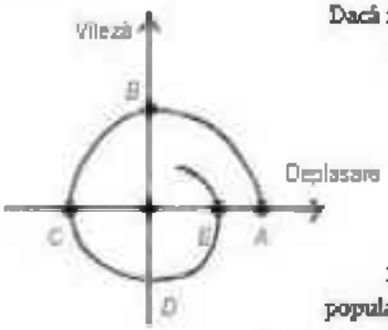


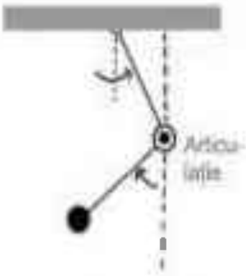
Diagrama de fază pentru pendulul simplu

Dacă mișcarea nu este forțată, greutatea se va opri într-un final, însă curba care descrie mișcarea este departe de spirala cuminte a pendulului simplu.

MIȘCARE HAOTICĂ

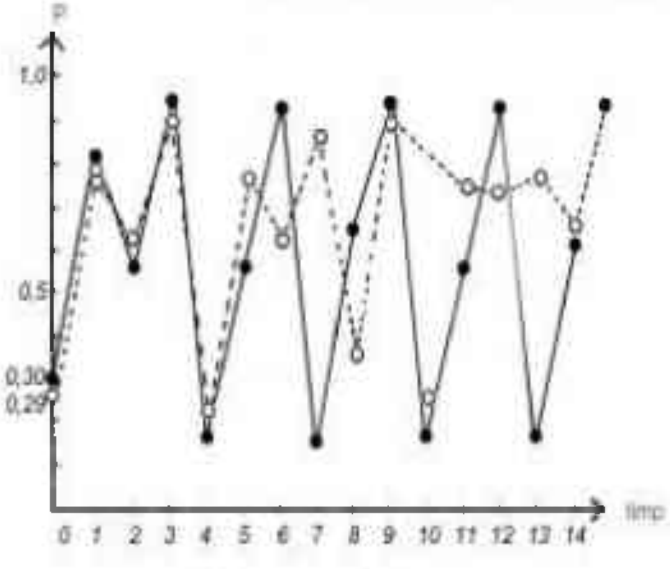
Caracteristica haosului este că un sistem determinist poate să pară că generează un comportament aleatoriu. Să luăm un alt exemplu, formula iterativă, sau repetitivă, $a \times p \times (1 - p)$, unde p reprezintă populația, măsurată ca proporție pe o scară de la 0 la 1. Valoarea lui a trebuie să fie undeva între 0 și 4, ca să garanteze că valoarea lui p rămâne în intervalul dintre 0 și 1.

Să facem un model al populației când $a = 2$. Dacă alegem o valoare de început, să zicem $p = 0{,}3$ la momentul $t = 0$, atunci, ca să găsim populația la momentul $t = 1$, înlocuim $p = 0{,}3$ în formula $a \times p \times (1 - p)$ și obținem 0,42. Folosind doar un calculator de buzunar, putem repeta operațiunea, de data aceasta cu $p = 0{,}42$, ca să obținem următoarea valoare (0,4872). Mergând înainte în același mod, determinăm populația la momente ulterioare. În acest caz, populația se stabilizează repede la $p = 0{,}5$. Această stabilizare apare întotdeauna pentru valori ale lui a mai mici de 3.



Mișcarea pendulului dublu

Dacă alegem acum $a = 3{,}9$, o valoare apropiată de maximul permis, și folosim aceeași populație inițială $p = 0{,}3$, populația nu se mai stabilizează și oscilează sălbatic. Aceasta deoarece valoarea lui a este în „regiunea haotică", adică a este un număr mai mare de 3,57. Mai mult, dacă alegem o populație inițială diferită, $p = 0{,}29$, o valoare apropiată de 0,3, creșterea populației urmărește aproximativ tiparul precedent pentru primele etape, dar apoi începe să se rupă complet de acesta. Acesta este comportamentul de care s-a lovit Edward Lorenz în 1961 (vezi caseta de la p. 107).



Modificarea populației în timp, a = 3,9

PROGNOZA VREMII

Chiar și folosind computere foarte puternice, știm bine că nu putem prognoza evoluția vremii decât cu câteva zile înainte. Pentru perioade mai mari de câteva zile, vremea încă ne face surprize urâte. Aceasta deoarece ecuațiile care guvernează evoluția vremii sunt neliniare – ele operează cu seturi de variabile, nu cu variabilele simple.

Teoria din spatele matematicii prognozei meteo a fost pusă la punct independent de inginerul francez Claude Navier, în 1821, și de matematicianul și fizicianul britanic George Gabriel Stokes, în 1845. Ecuațiile Navier–Stokes care au rezultat sunt de mare interes pentru cercetători. Institutul de Matematică Clay din Cambridge, Massachusetts, a oferit un premiu de un milion de dolari oricui face un pas semnificativ spre o teorie matematică prin care să le dezvăluie secretele. Aplicate la problema curgerii fluidelor, se pot afla multe despre mișcările constante de aer din atmosfera superioară. Dar deplasarea aerului aproape de suprafața pământului creează turbulențe și rezultă haos, iar comportamentul în momentele ulterioare este, în general, necunoscut.

În timp ce despre teoria sistemelor de ecuații liniare se știu multe, ecuațiile Navier–Stokes conțin termeni neliniari care le fac dificil de rezolvat. Practic, singura modalitate de a le rezolva este cea numerică, folosind computere puternice.

De la meteorologie la matematică

Efectul fluturelui a fost descoperit prin 1961, din întâmplare. Când meteorologul Edward Lorenz de la MIT s-a dus să bea o cafea, și-a lăsat între timp vechiul computer să deseneze. La întoarcere, a găsit ceva neașteptat. El încerca să reconstruiască niște configurații interesante ale vremii, dar a găsit un grafic nou, de nerecunoscut. Era ciudat, pentru că introdusese aceleași valori inițiale și calculatorul ar fi trebuit să deseneze aceeași imagine. Era oare momentul să scape de computerul cel vechi și să își ia unul mai de încredere?

După un timp a remarcat o schimbare în modul în care introdusese valorile inițiale: mai înainte folosise șase zecimale, dar la reintroducere nu s-a mai „deranjat" decât cu trei. Ca să explice diferența, a introdus conceptul de „efect al fluturelui". După această descoperire, preocupările lui științifice au migrat spre matematică.

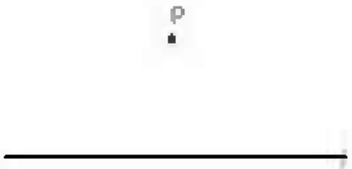
ATRACTORI STRANII

Se poate spune despre sistemele dinamice că ar conține „atractori" în diagramele lor de fază. În cazul pendulului simplu, atractorul este punctul fix de la origine spre care este direcționată mișcarea. La pendulul dublu este mai complicat, dar, chiar și aici, apar unele regularități în reprezentarea fazelor și se poate vorbi despre atracție spre un set de puncte din diagrama de fază. Pentru sisteme ca acesta, setul de puncte poate forma un fractal (vezi p. 100) care este numit atractor „straniu", cu o structură matematică precisă. Așadar, nu este totul pierdut. În noua teorie a haosului nu avem de-a face atât cu haosul „haotic", cât mai ales cu un haos „obișnuit".

Idee de bază
dezlănțuirea regularității

27 Postulatul paralelelor

Această poveste dramatică începe cu un simplu scenariu geometric. Imaginați-vă o dreaptă l și un punct P care nu se află pe ea. Câte paralele la dreapta l putem trasa prin punctul P? Pare evident că există o singură linie care trece prin P și care nu va întâlni dreapta l, oricât de mult am prelungi-o în ambele direcții.



Afirmația pare autosuficientă și în concordanță perfectă cu bunul-simț. Euclid din Alexandria a introdus o variantă a ei ca postulat în fundamentele geometriei, *Elementele*.

Bunul-simț nu este întotdeauna un îndrumător de încredere. Vom vedea dacă prezumția lui Euclid are și sens matematic.

ELEMENTELE LUI EUCLID

Geometria lui Euclid este prezentată în cele 13 cărți ale *Elementelor*, scrise în jurul anului 300 î.Hr. Una dintre cele mai influente lucrări de matematică scrise vreodată, a fost apreciată de matematicienii greci ca o primă codificare sistematică a geometriei. Cercetători de mai târziu au studiat-o și au tradus-o după manuscrisul care exista și a fost răspândită și lăudată peste tot drept modelul a ceea ce ar trebui să fie geometria.

Elementele s-au infiltrat până la nivel de școală, iar lecturile din „cartea sacră" au devenit modul în care era predată geometria. Cartea s-a dovedit nepotrivită pentru cei mai mici dintre elevi, totuși. După remarca acidă a poetului A.C. Hilton, „scriau ce-au învățat papagalicește, dar nu scriau bine". Ați putea spune că Euclid a scris pentru oameni în toată firea, nu pentru copii. În școlile englezești, Euclid a ajuns la apogeul influenței lui în secolul al XIX-lea, dar rămâne un reper și pentru matematicienii de azi.

CRONOLOGIE

300 î.Hr.	1829–1831 d.Hr.	1854
Euclid include postulatul paralelelor în Elementele lui	Lobacevski și Bolyai își publică lucrările despre geometria hiperbolică	Riemann ține prelegeri despre bazele geometriei

Ceea ce dă valoare *Elementelor* lui Euclid este stilul – principala lui realizare este prezentarea geometriei ca o succesiune de propoziții demonstrate. Sherlock Holmes i-ar fi admirat sistemul de deducție, care avansează logic de la postulate formulate clar, și l-ar fi criticat aspru pe dr. Watson pentru că nu îl vede ca pe un „sistem rece, lipsit de emoții".

Chiar dacă edificiul geometriei lui Euclid se bazează pe postulate (care sunt numite acum axiome, vezi caseta), acestea nu erau suficiente. Euclid a adăugat „definiții" și „noțiuni comune". Definițiile includ declarații de genul „un punct este ceea ce nu are nici o parte" și „o linie este lungime fără lățime". Noțiunile comune sunt afirmații cum ar fi: „întregul este mai mare decât partea" și „lucrurile care sunt egale cu același lucru sunt egale și între ele". Abia spre sfârșitul secolului al XIX-lea a fost recunoscut faptul că Euclid făcea presupuneri tacite.

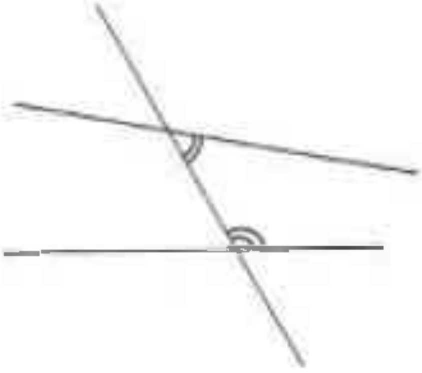
Postulatele lui Euclid

Una dintre caracteristicile matematicii este că doar câteva presupuneri pot genera teorii ample. Postulatele lui Euclid sunt un excelent exemplu, unul care stabilește, de fapt, modelul pentru sistemele axiomatice de mai târziu. Cele cinci postulate ale lui Euclid sunt:

1. Prin oricare două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.
2. Orice segment de dreaptă poate fi extins la infinit ca linie dreaptă.
3. Se poate construi un cerc cu centrul în orice punct și cu orice rază.
4. Toate unghiurile drepte sunt egale între ele.
5. Dacă o linie dreaptă care intersectează alte două linii drepte formează pe o aceeași parte unghiuri interioare mai mici decât două unghiuri drepte, atunci cele două linii, dacă sunt extinse, se întâlnesc în partea în care unghiurile sunt mai mici decât două unghiuri drepte.

AL CINCILEA POSTULAT

Cel de-al cincilea postulat al lui Euclid a fost cel care a provocat controverse, la 2 000 de ani de la prima apariție a *Elementelor*. În privința stilului, pare nelalocul lui prin formularea încâlcită și greoaie. Euclid însuși era nemulțumit, dar avea nevoie de el ca să demonstreze propoziții și a fost nevoit să-l includă. El a încercat să îl demonstreze cu ajutorul celorlalte postulate, dar a eșuat.



Al cincilea postulat al lui Euclid

Matematicienii de mai târziu au încercat fie să îl demonstreze, fie să formuleze în locul lui un postulat mai simplu.

1872

Klein unifică geometria, prin intermediul teoriei grupurilor.

1915

Teoria relativității generale a lui Einstein are la bază geometria Riemann.

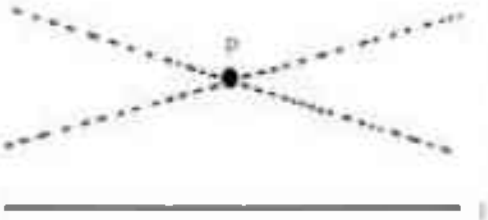
În 1795, John Playfair l-a enunțat într-o formă care a câștigat popularitate: printr-un punct *P* care nu aparține dreptei *l* se poate trasa o paralelă la dreapta *l*, și numai una. Cam în aceeași perioadă, Adrien-Marie Legendre a substituit o altă versiune echivalentă, când a afirmat existența unui triunghi ale cărui unghiuri însumate fac 180°. Aceste noi forme ale celui de-al cincilea postulat au răspuns, într-o oarecare măsură, obiecției de artificialitate. Ele erau mai acceptabile decât versiunea greoaie a lui Euclid.

O altă linie de atac a fost căutarea demonstrației evazive a celui de-al cincilea postulat. Aceasta a exercitat o atracție puternică asupra adepților ei. Dacă se putea găsi o demonstrație, atunci postulatul devenea o teoremă și putea fi retras de pe linia de tragere. Din păcate, încercările de a face acest lucru s-au dovedit a fi excelente exemple de raționament circular, în care se presupun chiar lucrurile care se încearcă a fi demonstrate.

GEOMETRIE NEEUCLIDIANĂ

Descoperirea a venit odată cu cercetările lui Carl Friedrich Gauss, János Bolyai și Nikolai Ivanovici Lobacevski. Gauss nu și-a publicat cercetările, dar e cert că a ajuns la concluziile lui în 1817. Bolyai a publicat rezultatele în 1831 și Lobacevski, independent, în 1829, apărând o dispută de prioritate între cei doi. Nu există dubii privind capacitatea excepțională a tuturor acestor cercetători. Ei au arătat efectiv că al cincilea postulat era independent de celelalte patru postulate. Au mai arătat că, adăugând negația acestuia la primele patru postulate, este posibil un sistem coerent.

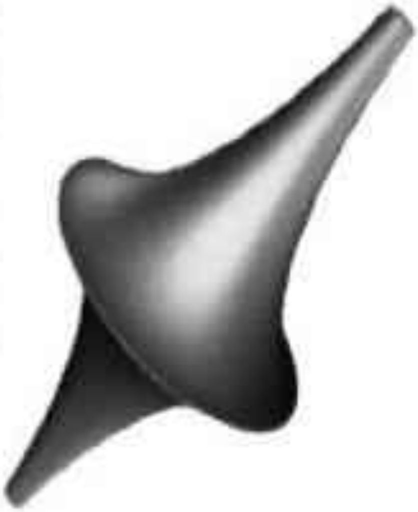
Bolyai și Lobacevski au construit o nouă geometrie, permițând să existe mai mult de o linie care trece prin punctul *P* și care nu întâlnește niciodată linia *l*. Cum se poate acest lucru? Cu siguranță că linia punctată intersectează linia *l*. Dacă acceptăm aceasta, suntem de acord, fără să ne dăm seama, cu viziunea lui Euclid. Diagrama este, așadar, un truc bazat pe încredere, iar ceea ce Bolyai și Lobacevski propuneau era un soi nou de geometrie, care nu se conforma celei a bunului-simț promovate de Euclid. De fapt, geometria lor neeuclidiană poate fi gândită ca o geometrie pe suprafața curbă a ceea ce este cunoscut ca o pseudosferă.



Cele mai scurte drumuri între două puncte pe o pseudosferă joacă exact același rol ca liniile drepte din geometria lui Euclid. Una dintre curiozitățile acestei geometrii neeuclidiene este că suma unghiurilor unui triunghi este mai mică de 180°. Această geometrie este numită geometrie hiperbolică.

O altă alternativă la al cincilea postulat afirmă că fiecare linie care trece prin punctul *P* întâlnește linia *l*. Altfel spus, nici una dintre liniile care trec prin punctul *P* nu este „paralelă" cu *l*. Această geometrie este diferită de cea a lui Bolyai și Lobacevski, dar este și ea o geometrie autentică. Un model pentru aceasta este geometria pe suprafața

unei sfere. Cercurile mari (acele cercuri care au aceeași circumferință ca și sfera însăși) joacă aici rolul liniilor drepte în geometria euclidiană. În această geometrie neeuclidiană, suma unghiurilor unui triunghi este mai mare de 180°. Aceasta se numește geometrie eliptică și este asociată cu matematicianul german Bernhard Riemann, care a studiat-o în anii 1850.



Geometria lui Euclid, despre care s-a crezut că ar fi singura geometrie adevărată – potrivit lui Immanuel Kant, geometria „încorporată în ființa omului" –, a fost coborâtă de pe piedestal. Geometria euclidiană era de acum unul dintre mai multe sisteme, înghesuită între geometria hiperbolică și cea eliptică. Diferitele versiuni au fost unificate sub o singură umbrelă de către Felix Klein, în 1872. Apariția geometriei neeuclidiene a fost un eveniment care a zguduit matematica și a deschis drumul pentru geometria relativității generale a lui Einstein (vezi p. 192). Teoria generală a relativității este cea care cere un nou tip de geometrie – geometria spațiului-timp curbat, sau geometria riemanniană. Această geometrie neeuclidiană era cea care explica de ce cad lucrurile, și nu forța de atracție gravitațională dintre obiecte a lui Newton. Prezența în spațiu a obiectelor masive, cum ar fi Pământul și Soarele, determină curbarea continuumului spațiu-timp. O bilă așezată pe o foaie de cauciuc subțire va provoca o mică adâncitură, dar încercați să așezați o bilă de popice și va rezulta o deformație mare.

Această curbură măsurată de geometria riemanniană prezice cum se îndoaie razele de lumină în prezența obiectelor masive din spațiu. Spațiul euclidian obișnuit, cu timpul ca o componentă independentă, nu va fi suficient pentru relativitatea generală. Unul dintre motive ar fi că spațiul euclidian este plat – nu există nicio curbură. Gândiți-vă la o foaie de hârtie așezată pe masă; putem spune că, în orice punct al hârtiei, curbura este zero. Subliniem că spațiul-timp riemannian este un concept de curbură care variază continuu – la fel cum variază de la un punct la altul curbura unei bucăți de pânză boțite. Este ca și cum te-ai uita într-o oglindă strâmbă – imaginea pe care o vezi depinde de locul în care privești în oglindă.

Nu este de mirare că Gauss a fost atât de impresionat de tânărul Riemann în anii 1850 și chiar a sugerat că intuiția acestuia avea să revoluționeze „metafizica" spațiului.

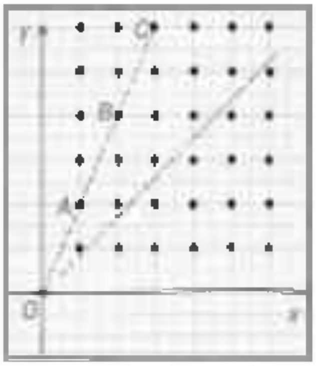
Idee de bază

Și dacă paralele se întâlnesc?

28 Geometrie discretă

Geometria este unul dintre cele mai vechi meșteșuguri – literal, ea înseamnă măsurarea pământului (de la *metria* și *geo*). Geometria obișnuită se ocupă cu studiul liniilor continue și al formelor solide, acestea putând fi considerate ca fiind compuse din puncte așezate unul „lângă" celălalt. Matematica discretă operează cu numere întregi, ca opuse șirului continuu de numere reale. Geometria discretă poate implica un număr finit de puncte și de linii, sau rețele de puncte – continuu este înlocuit de izolat.

Rețeaua este, de obicei, setul de puncte ale căror coordonate sunt numere întregi. Această geometrie ridică probleme interesante și are aplicații în domenii extrem de diverse, cum ar fi teoria codificării sau conceperea experimentelor științifice. Să ne gândim la un far care aruncă o rază de lumină. Imaginați-vă o rază de lumină care pornește din punctul O și baleiază între orizontală și verticală. Ne putem întreba ce rază lovește ce puncte din rețea (care ar putea fi bărci ancorate într-un port, într-un aranjament mai degrabă uniform).



Rețeaua de puncte din sistemul de axe x/ y

Ecuația razei care trece prin origine este $y = mx$. Aceasta este ecuația unei linii drepte care trece prin origine cu gradient m. Dacă raza este $y = 2x$, atunci va lovi punctul cu coordonatele $x = 1$ și $y = 2$, deoarece aceste valori satisfac ecuația. Dacă raza lovește un punct din rețea cu $x = a$ și $y = b$, gradientul m este fracția $^b/_a$. În consecință, dacă m nu este o fracție propriu-zisă (ar putea fi $\sqrt{2}$, de exemplu), raza de lumină va rata toate punctele din rețea.

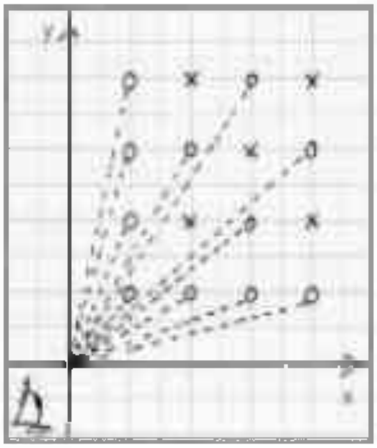
Raza de lumină $y = 2x$ lovește punctul A cu coordonatele $x = 1$ și $y = 2$, dar nu va lovi punctul B cu coordonatele $x = 2$, $y = 4$, și toate punctele de „dincolo" de A (cum ar fi C, cu coordonatele $x = 3$, $y = 6$, și D cu $x = 4$, $y = 8$) vor fi și ele ratate. Ne putem imagina că stăm în origine și

CRONOLOGIE

1639 d.Hr.	1806	1846
Pascal își descoperă teorema, când avea doar 16 ani.	Brianchon descoperă teorema duală a teoremei lui Pascal.	Kirkman anticipează descoperirea Sistemelor Triple Steiner.

identificăm punctele care pot fi văzute de acolo și pe cele care sunt ascunse vederii.

Putem arăta că punctele de coordonate x = a și x = b care pot fi văzute sunt cele care sunt relativ prime unul față de celălalt. Acestea sunt puncte cu coordonate, cum ar fi $x = 2$ și $y = 3$, unde nici un alt număr în afară de 1 nu divide simultan și x și y. Punctele din spatele acestuia vor fi multipli, ca de exemplu $x = 4$, $y = 6$ sau $x = 6$, $y = 9$ etc.



Punctele o „vizibile" din origine și punctele x ascunse

TEOREMA LUI PICK

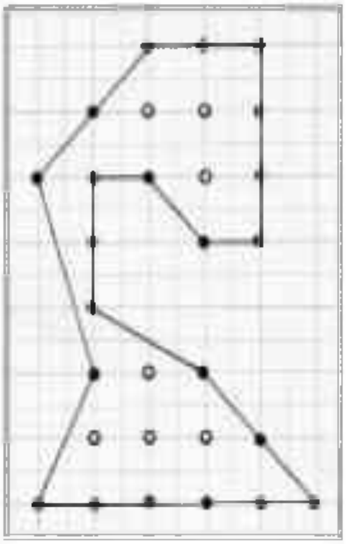
Matematicianul austriac Georg Pick are două motive să aspire la celebritate. Unul ar fi că a fost un prieten apropiat al lui Albert Einstein și a jucat un rol important în aducerea tânărului savant la Universitatea Germană din Praga, în 1911. Celălalt ar fi că a scris o scurtă lucrare, publicată în 1899, despre geometria „reticulară". Din activitatea de o viață ce a acoperit o gamă largă de subiecte, el este amintit pentru captivanta teoremă a lui Pick – dar ce teoremă!

Teorema lui Pick oferă o modalitate de calculare a ariei închise de o formă cu mai multe laturi (poligonală), conturată prin unirea punctelor ale căror coordonate sunt numere întregi. Este matematica acelor cu gămălie.

Ca să găsim aria, trebuie să numărăm punctele ● de pe contur și numărul de puncte interioare ○. În exemplul nostru, numărul de puncte de pe contur este b = 22, iar numărul de puncte din interior este c = 7. Este tot ce ne trebuie ca să folosim teorema lui Pick:

$$\text{aria} = b/2 + c - 1$$

După această formulă, aria este $22/2 + 7 - 1 = 17$. Aria este egală cu 17 unități pătrate. Atât este de simplu! Teorema lui Pick poate fi aplicată oricărei forme create prin unirea unor puncte care au coordonate numere întregi, singura condiție fiind ca respectivul contur să nu se intersecteze pe sine.



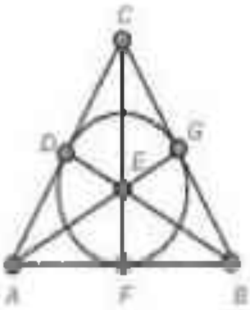
O formă cu mai multe laturi sau poligonală

1892

Fano descoperă planul Fano, cel mai simplu exemplu al unei geometrii proiective.

1899

Pick își publică teorema despre ariile poligoanelor.



Planul Fano

PLANUL FANO

Geometria planului Fano a fost descoperită aproximativ în aceeași perioadă cu formula lui Pick, dar nu are nimic de-a face cu vreo măsurare. Numit după matematicianul italian Gino Fano, pionierul studiului geometriei finite, planul Fano este cel mai simplu exemplu de geometrie „proiectivă". El are doar șapte puncte și șapte drepte.

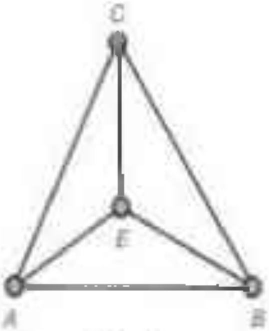
Cele șapte puncte sunt notate A, B, C, D, E, F și G. Este ușor să distingem șase din cele șapte drepte, dar unde este a șaptea? Proprietățile geometriei și modul în care este construită diagrama fac necesar să tratăm a șaptea dreaptă ca DFG – cercul care trece prin D, F și G. Nu este nici o problemă aici, de vreme ce, în geometria discretă, dreptele nu trebuie să fie „drepte" în sens convențional.

Această mică geometrie are multe proprietăți, de exemplu:

- fiecare pereche de puncte determină o dreaptă care trece prin amândouă,
- fiecare pereche de drepte determină un punct care se află pe amândouă.

Aceste două proprietăți ilustrează remarcabila dualitate care apare în geometriile de acest tip. A doua proprietate este, de fapt, prima, cuvintele „punct" și „dreaptă" fiind schimbate între ele, și, la fel, prima este a doua.

Din orice propoziție adevărată, dacă schimbăm două cuvinte între ele și facem mici ajustări pentru a corecta limbajul, obținem altă propoziție adevărată. Geometria proiectivă este cât se poate de simetrică. Nu însă și geometria euclidiană. În geometria euclidiană există drepte paralele, adică perechi de drepte care nu se intersectează niciodată. Așadar, putem vorbi foarte ușor despre conceptul de paralelism în geometria euclidiană. Acest lucru nu este posibil în geometria proiectivă. În geometria proiectivă, toate perechile de drepte se întâlnesc într-un punct. Pentru matematicieni, aceasta înseamnă că geometria euclidiană este un tip inferior de geometrie.



Planul Fano
făcut euclidian

Dacă scoatem din planul Fano o dreaptă și punctele ei, ne întoarcem încă o dată în domeniul geometriei euclidiene nesimetrice și al liniilor paralele. Să presupunem că înlăturăm dreapta „circulară" DFG, ca să obținem o diagramă euclidiană.

Cu o dreaptă mai puțin, există acum șase drepte: AB, AC, AE, BC, BE și CE. Există acum perechi de drepte care sunt „paralele", adică AB și CE, AC și BE, și BC și AE. Dreptele sunt paralele pentru că nu au nici un punct în comun – ca dreptele AB și CE.

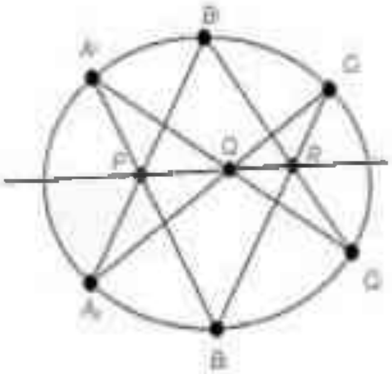
Planul Fano ocupă o poziție vedetă în matematică datorită conexiunilor lui cu atât de multe idei și aplicații. El este una dintre cheile problemei școlărițelor,

formulată de Thomas Kirkman (vezi p. 167). În teoria proiectării experimentelor, planul Fano apare ca un exemplu prosean, un Sistem Triplu Steiner (STS). Fiind dat un număr finit de n obiecte, un STS este o modalitate de a le împărți în blocuri de câte trei, astfel încât fiecare pereche luată dintre cele n obiecte să se regăsească într-un singur bloc. Date fiind șapte obiecte A, B, C, D, E, F și G, blocurile din STS corespund liniilor din planul Fano.

A	F	B
B	G	C
C	A	D
D	B	E
E	C	F
F	D	G
G	E	A

O PERECHE DE TEOREME

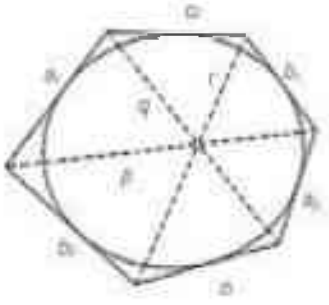
Teorema lui Pascal și teorema lui Brianchon se află la granița dintre geometria continuă și cea discretă. Ele sunt diferite, dar înrudite una cu alta. Teorema lui Pascal a fost descoperită de Blaise Pascal în 1639, când avea doar 16 ani. Să luăm cercul turtit numit, de obicei, elipsă (vezi p. 89) și să marcăm pe el șase puncte pe care le vom numi A_1, B_1, C_1 și A_2, B_2, C_2. Vom numi P punctul în care linia A_1B_2 intersectează A_2B_1; Q punctul în care linia A_1C_2 intersectează A_2C_1; și R punctul în care B_1C_2 intersectează B_2C_1. Teorema afirmă că punctele P, Q și R se află, toate, pe aceeași dreaptă.



Teorema lui Pascal

Teorema lui Pascal este adevărată oricare ar fi pozițiile diferitelor puncte pe conturul elipsei. De fapt, am putea înlocui elipsa cu orice conică, de exemplu hiperbolă, cerc, parabolă sau chiar cu o pereche de linii drepte (caz în care configurația este numită „leagănul pisicii"), și teorema tot ar fi adevărată.

Teorema lui Brianchon a fost descoperită mult mai târziu de matematicianul și chimistul francez Charles-Julien Brianchon. Desenăm șase tangente pe care le vom numi liniile a_1, b_1, c_1 și a_2, b_2, c_2, ce ating circumferința elipsei. Putem defini apoi trei diagonale, liniile p, q și r, astfel încât: p este linia dintre punctele în care a_1 întâlnește b_2 și a_2 întâlnește b_1; q este linia dintre punctele în care a_1 întâlnește c_2 și a_2 întâlnește c_1; și r este linia dintre punctele în care b_1 întâlnește c_2 și b_2 întâlnește c_1. Teorema lui Brianchon spune că liniile p, q și r se intersectează în același punct.



Teorema lui Brianchon

Aceste două teoreme sunt duale una față de cealaltă și constituie un alt exemplu de teoreme care apar în perechi în geometria proiectivă.

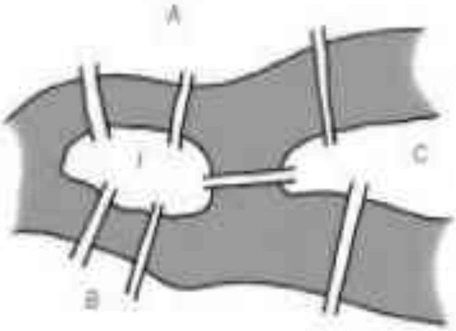
Idee de bază
puncte individuale de interes

29 Grafuri

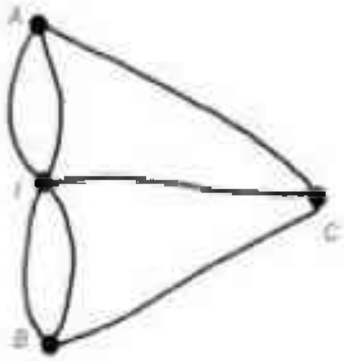
În matematică există două tipuri de grafuri. La școală desenăm curbe care arată relațiile dintre variabilele x și y. În cele de tip mai recent, punctele sunt unite de linii sinuoase.

Königsberg este un oraș din estul Prusiei, celebru pentru cele șapte poduri care traversează râul Pregel. Oraș natal al ilustrului filosof Immanuel Kant, Königsberg și podurile lui sunt legate și de faimosul matematician Leonhard Euler.

În secolul al XVIII-lea, a fost pusă o întrebare bizară: era posibil să pleci la plimbare prin Königsberg și să traversezi toate podurile, însă numai o dată? Nu trebuie să ne încheiem plimbarea în locul în care am început-o – doar să trecem o dată pe fiecare pod.



În 1735, Euler și-a prezentat soluția în fața Academiei Ruse, o soluție considerată astăzi drept începutul teoriei moderne a grafurilor. În diagrama noastră semiabstractă, insula din mijlocul râului este marcată cu I, iar malurile râului cu A, B și C. Puteți planifica o plimbare de duminică după-amiază trecând o singură dată pe fiecare pod? Luați un creion și încercați. Pasul-cheie este renunțarea la semiabstracție și la abstractizarea completă. Făcând asta, se obține un graf de puncte și de linii. Pământul este reprezentat prin „puncte", iar podurile care leagă malurile, prin „linii". Nu ținem cont că liniile nu sunt drepte sau au lungimi diferite. Aceste lucruri nu au importanță. Doar conexiunile contează.



Euler a făcut o observație despre cum să ai o plimbare reușită. Cu excepția începutului și sfârșitului plimbării, de fiecare dată când treci un pod spre un mal trebuie să fie posibil să pleci de acolo pe un pod pe care nu ai mai mers până atunci. Traducând această idee în tabloul abstract, am putea spune că liniile care se întâlnesc într-un punct trebuie să fie în

CRONOLOGIE

1735 d.Hr.	1874	1930
Euler rezolvă problema podurilor din Königsberg.	Carl Schorlemmer face legătura dintre chimie și „arbori".	Kuratowski își demonstrează teorema grafurilor planare.

perechi. Pe lângă cele două puncte care reprezintă începutul și sfârșitul plimbării, podurile pot fi traversate dacă și numai dacă fiecare punct are un număr par de linii care converg spre el.

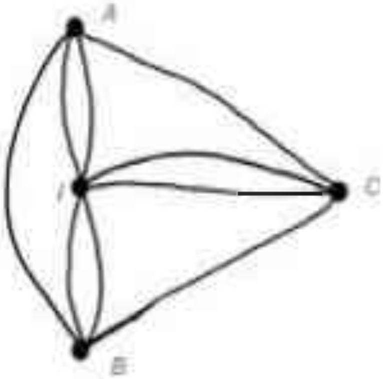
Numărul de linii care se întâlnesc într-un punct reprezintă „gradul" punctului respectiv.

Teorema lui Euler :

Gradul = 5

Podurile dintr-un oraș pot fi traversate exact o dată dacă, exceptând cel mult două dintre ele, toate punctele au grade pare.

Dacă ne uităm la graful care reprezintă orașul Königsberg, fiecare punct are grad impar. Aceasta înseamnă că o plimbare care să treacă o dată și numai o dată pe fiecare pod nu este posibilă în Königsberg. Dacă ar fi schimbat aranjamentul podurilor, atunci o astfel de plimbare ar fi devenit posibilă. Dacă ar fi construit un pod suplimentar între insula I și malul C, atunci gradele punctelor I și C ar fi pare. Aceasta înseamnă că am putea începe o plimbare în A și să o încheiem în B după ce am trecut pe fiecare pod exact o dată. Dacă ar mai fi construit încă un pod, de data aceasta între A și B (figura din dreapta), am putea începe de oriunde și să terminăm în același loc, deoarece fiecare punct ar avea grad par în acest caz.



TEOREMA STRÂNGERII DE MÂNĂ

Dacă ni-ar cere să desenăm un graf care să conțină trei puncte de grad impar, am avea o problemă. Încercați. Nu o putem face deoarece

În orice graf, numărul de puncte cu grad impar trebuie să fie un număr par.

Aceasta este teorema strângerii de mână – prima teoremă din teoria grafurilor. În orice graf, fiecare linie are un început și un sfârșit sau, cu alte cuvinte, este nevoie de doi oameni pentru o strângere de mână. Dacă însumăm gradele fiecărui punct

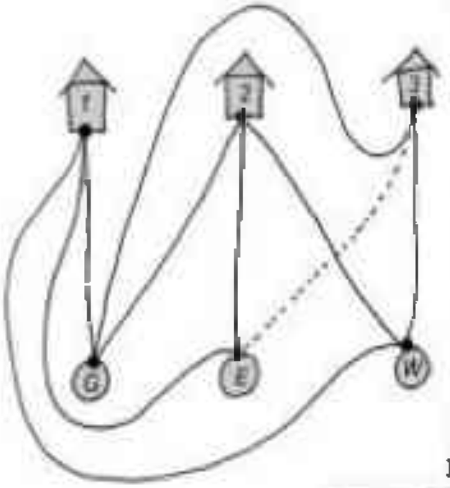
1935

George Pólya dezvoltă tehnici de numărare pentru grafuri ca algebră.

1999

Eric Rains și Neil Sloan extind numărarea „arborilor".

pentru întregul graf, trebuie să obținem un număr par, să spunem N. După aceea, vom spune că sunt x puncte cu grad par și y puncte cu grad impar. Însumând toate gradele punctelor impare, vom obține N_i și, însumând toate gradele punctelor pare, vom obține N_p, care este par. Deci avem $N_i + N_p = N$ și, așadar, $N_i = N - N_p$. Rezultă că N_i este par. Dar x însuși nu poate fi impar, deoarece suma unui număr impar de grade impare ar fi un număr impar. De aici rezultă că x trebuie să fie par.



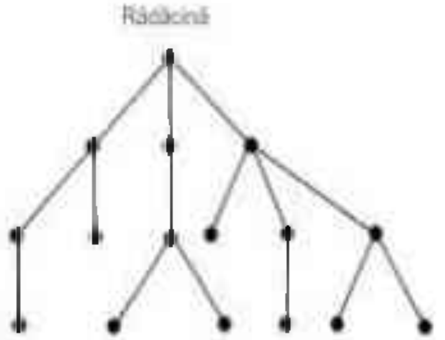
GRAFURI NON-PLANARE

Problema utilităților este veche. Imaginați-vă trei case și trei utilități – gaz, electricitate și apă. Trebuie să conectăm fiecare casă la fiecare dintre utilități, dar există o condiție – conexiunile nu trebuie să se intersecteze.

În realitate, acest lucru nu poate fi făcut – dar puteți testa pe prietenii care nu bănuiesc nimic. Graful descris prin conectarea a trei puncte cu alte trei puncte în toate modurile posibile (cu doar nouă linii) nu poate fi desenat plan fără intersecții. Un astfel de graf se numește non-planar. Acest graf al utilităților, împreună cu graful format de toate liniile care unesc cinci puncte, joacă un rol special în teoria grafurilor. În 1930, matematicianul polonez Kazimierz Kuratowski a demonstrat următoarea teoremă că un graf este planar dacă și numai dacă nu îl conține pe nici unul din acestea două ca subgraf, un graf mai mic conținut în cel principal.

ARBORII

Un „arbore" este un tip special de graf, foarte diferit de graful utilităților sau de graful Königsberg. În problema podurilor din Königsberg există posibilități de începere dintr-un punct și de întoarcere tot acolo, pe un drum diferit. Un astfel de drum pornit dintr-un punct și înapoi la el se numește ciclu. Un arbore este un graf



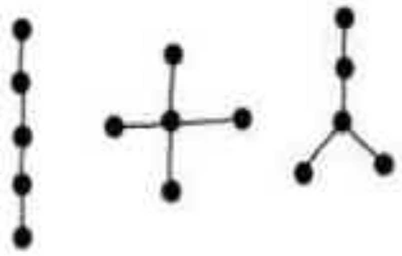
care nu are cicluri.

Un exemplu cunoscut de graf-arbore este modul în care directoarele sunt aranjate într-un computer. Ele sunt aranjate într-o ierarhie, cu un director-rădăcină și subdirectoare care pleacă de la el. Pentru că nu există cicluri, nu este nici o altă posibilitate să se treacă dintr-o ramură în alta fără să se treacă prin directorul-rădăcină – o manevră familiară pentru utilizatorii de computere.

NUMĂRĂTOAREA ARBORILOR

Câți arbori diferiți pot fi desenați dintr-un anumit număr de puncte? Problema numărării arborilor a fost abordată în secolul al XIX-lea de matematicianul englez Arthur Cayley. De exemplu, sunt exact trei tipuri diferite de arbori cu cinci puncte.

Cayley a reușit să numere tipurile de arbori diferiți pentru numere mici de puncte.



El a putut să meargă până la arbori cu cel mult 14 puncte, înainte să fie depășit de complexitatea calculelor, inabordabile fără computer. De atunci, calculele au progresat până la arbori cu cel mult 22 de puncte. Există milioane de arbori posibili de acest tip.

Chiar și la vremea lui, cercetările lui Cayley au avut aplicații practice. Numărarea arborilor este importantă în chimie, unde caracteristicile speciale ale unor compuși depind de modul în care atomii sunt aranjați în molecule. Compușii cu același număr de atomi, dar cu aranjamente diferite, au proprietăți chimice diferite. Folosind analiza lui, a fost posibil să se prezică „pe hârtie" existența unor compuși chimici care au fost descoperiți ulterior în laborator.

Idee de bază
dincolo de poduri și printre arbori

30 Problema celor patru culori

Cine i-o fi dat micului Tim, în dar de Crăciun, patru creioane colorate și o hartă pe care erau trasate contururile comitatelor din Anglia? Putea să fie vecinul topograf, care trimitea din când în când mici daruri, sau matematicianul acela bizar, Augustus de Morgan, care locuia în apropiere și petrecea o parte din zi cu tatăl lui Tim. Cu siguranță nu a fost Moș Crăciun.

Familia Cratchit locuia într-o casă mohorâtă de pe strada Bayham, în Camden Town, nu departe de nou înființata University College, unde era profesor de Morgan. Sursa cadoului avea să devină clară de Anul Nou, când profesorul a întrebat dacă Tim colorase harta.

De Morgan avea idei precise despre cum trebuie făcută operațiunea: „să colorezi harta astfel încât două comitate cu o graniță comună să aibă culori diferite".

„Dar nu am destule creioane colorate", a spus Tim, fără ezitare. De Morgan a zâmbit și l-a lăsat să se apuce de treabă. Însă unul dintre studenții lui, Frederick Guthrie, îl întrebase recent despre asta și vorbise despre o colorare reușită a hărții Angliei cu doar patru culori. Problema a stârnit imaginația matematică a lui De Morgan.

Este posibil să colorezi o hartă cu doar patru culori, astfel încât regiunile învecinate să fie distincte? Cartografii erau convinși de secole, dar se putea demonstra riguros? Ne putem gândi la orice hartă din lume, pe lângă harta comitatelor englezești, cum ar fi statele americane sau departamentele Franței, și chiar hărți imaginare, cu regiuni și granițe arbitrare. Trei culori nu sunt totuși suficiente.

Să ne uităm la harta statelor din Vestul american. Dacă am avea la dispoziție doar albastru, verde și roșu, am putea începe prin a colora Nevada și Idaho. Nu contează

CRONOLOGIE

1852 d.Hr.	1879	1890
Guthrie, studentul lui Morgan, îi ridică acestuia problema	Se consideră că problema a fost rezolvată de Kempe	Heawood expune greșelile din demonstrația lui Kempe și demonstrează o teoremă a celor cinci culori

cu ce culori începem, așa că vom alege albastru pentru Nevada și verde pentru Idaho. Până acum nu avem probleme. Această alegere înseamnă, însă, că Utah trebuie colorat în roșu, iar Arizona verde, California roșu și Oregon verde. Aceasta face ca și Oregon și Idaho să fie colorate în verde, așadar nu mai pot fi deosebite. Dar, dacă am avea patru culori, să zicem că adăugăm galben, l-am putea folosi ca să colorăm statul Oregon și totul ar fi în regulă. Aceste patru culori – albastru, verde, roșu și galben – sunt însă suficiente pentru orice hartă? Această întrebare este cunoscută sub numele de problema celor patru culori.

Statele din Vestul american

RĂSPÂNDIREA PROBLEMEI

La 20 de ani după ce de Morgan a recunoscut importanța problemei, ea a devenit cunoscută în lumea matematicienilor din Europa și America. În anii 1860, Charles Sanders Peirce, un matematician și filosof american, a crezut că o demonstrase, dar nu există nici o dovadă rămasă a argumentației sale.

Problema a câștigat în importanță datorită intervenției omului de știință victorian Francis Galton. El i-a văzut valoarea publicitară și l-a ispitit pe eminentul matematician de la Cambridge, Arthur Cayley, să scrie o lucrare despre ea, în 1878. Din nefericire, Cayley a fost nevoit să admită că eșuase în încercarea de a găsi o demonstrație, dar a observat că era suficient să fie luate în considerare doar hărțile cubice (unde într-un punct se întâlnesc exact trei țări). Această contribuție l-a determinat pe unul dintre studenții lui, Alfred Bray Kempe, să încerce să ofere o soluție. După un singur an, Kempe a anunțat că găsise o demonstrație. Cayley l-a felicitat din toată inima, demonstrația i-a fost publicată, iar el a fost ales în Societatea Regală din Londra.

CE S-A ÎNTÂMPLAT DUPĂ ACEEA?

Demonstrația lui Kempe era lungă și complicată din punct de vedere tehnic, așa că au existat câțiva oameni care nu s-au lăsat convinși de ea, însă dovada a fost, în general, acceptată. A fost o surpriză așadar, zece ani mai târziu, când Percy Heawood, din Durham, a găsit un exemplu de hartă care evidenția un punct slab în demonstrația lui Kempe. Chiar dacă nu a reușit să găsească o dovadă, Heawood a arătat că problema celor patru culori era încă deschisă. A fost un îndemn pentru matematicieni să se apuce din nou de desenat, iar pentru novici a fost o șansă

1976
Appel și Haken prezintă o demonstrație bazată pe computer pentru rezultatul general.

1994
Demonstrația pe computer este simplificată, dar rămâne una realizată pe computer.

de afirmare. Cu ajutorul unora dintre tehnicile lui Kempe, Heawood a demonstrat teorema pentru cinci culori – și anume că orice hartă poate fi colorată în cinci culori. Acesta ar fi fost un rezultat foarte important, dacă ar fi fost desenată o hartă care să nu poată fi colorată cu patru culori. Așa cum stăteau lucrurile, matematicienii se aflau în fața unei dileme: era nevoie de patru sau de cinci culori?

Gogoașa simplă sau „torul”

Problema de la bază, cu patru culori, se referea la hărți desenate pe o suprafață plană sau sferică sau la hărți desenate pe o suprafață ca o gogoașă găurită – o suprafață interesantă pentru matematicieni prin forma ei, nu prin gust. Pentru această suprafață, Heawood a arătat că șapte culori erau necesare și suficiente pentru a colora orice hartă desenată pe ea. El chiar a găsit un rezultat pentru o gogoașă cu mai multe găuri (cu numărul de găuri h), prin care a stabilit numărul de culori care garanta colorarea oricărei hărți – deși nu a demonstrat că era vorba de numărul minim de culori. Un tabel cu primele valori stabilite de Heawood în funcție de numărul de găuri h este:

Un tor cu două găuri

numărul de găuri, h	1	2	3	4	5	6	7	8
numărul de culori suficiente, C	7	8	9	10	11	12	12	13

și, în general, $C = [\frac{1}{2}(7 + \sqrt{(1 + 48h)})]$. Parantezele drepte arată că luăm doar partea număr întreg din interiorul lor. De exemplu, când $h = 8$, $C = [13,3107...] = 13$. Formula lui Heawood a fost stabilită pornind de la condiția strictă că numărul de găuri este mai mare decât zero. Dacă substituim valoarea $h = 0$, obținem rezultatul $C = 4$.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ?

După 50 de ani, problema formulată în 1852 era tot nedemonstrată. Și în secolul XX ea avea să pună la încercare elita matematicienilor lumii.

S-au făcut, totuși, unele progrese, iar un matematician a demonstrat că patru culori erau suficiente pentru o hartă cu 27 de țări. Un altul a îmbunătățit rezultatul la 31 de țări și încă un matematician a mers până la 35 de țări. Acest proces în pași mărunți ar fi durat la nesfârșit. De fapt, observațiile făcute de Kempe și Cayley în chiar lucrările lor de început deschideau o cale mai bună pentru a merge înainte, iar matematicienii au descoperit că era suficient să verifice anumite configurații ale hărților ca să garanteze că patru culori erau suficiente. Piedica era că existau foarte multe asemenea configurații – la primele tentative de demonstrație erau câteva mii de verificat. Această verificare nu putea fi făcută cu creionul pe hârtie, însă matematicianul german Wolfgang Haken, care lucrase mulți ani la problemă, a reușit să-l atragă pe matematicianul și expertul în computere american Kenneth Appel. Metode ingenioase au coborât numărul de configurații sub

1 500. La sfârșitul lui iunie 1976, după multe nopți nedormite, treaba a fost terminată și, având drept partener de încredere computerul IBM 370, cei doi au rezolvat marea problemă.

Catedra de matematică a Universității din Indiana avea un nou motiv de laudă. Era un motiv de mândrie locală, dar unde erau aplauzele generalizate ale comunității matematicienilor? La urma urmei, era o problemă venerabilă, care putea fi înțeleasă și de copii, precum micul Tim, dar care vreme de peste un secol îi ridiculizase și îi chinuise pe unii dintre cei mai mari matematicieni.

Aplauzele au fost răzlețe. Unii au acceptat, până la urmă, că problema fusese rezolvată, dar mulți au rămas sceptici. Problema era că demonstrația fusese generată pe computer, iar aceasta depășea forma tradițională a demonstrației matematice. Era de așteptat ca demonstrația să fie lungă și greu de urmărit, dar o demonstrație pe computer era prea mult. A fost ridicată problema „verificabilității". Cum ar fi putut cineva să verifice miile de coduri de computer pe care se baza demonstrația? Cu siguranță, se puteau face și greșeli în programarea pe computer, iar o eroare s-ar fi dovedit fatală.

Și asta nu era tot. Ceea ce lipsea cu adevărat era factorul „aha". Cum putea cineva să citească demonstrația și să aprecieze subtilitatea problemei sau să împărtășească acel moment crucial al argumentației, momentul „aha"? Unul dintre cei mai înverșunați critici a fost eminentul matematician Paul Halmos. El considera că o demonstrație pe computer avea la fel de multă credibilitate ca demonstrația oferită de o prezicătoare de bâlci. Însă mulți alții au recunoscut realizarea și ar fi trebuit să fii curajos sau nebun ca să-ți risipești timpul prețios în încercarea de a găsi contraexemplul unei hărți care ar necesita cinci culori. S-ar fi putut face asta înainte de Appel și Haken, dar nu după ei.

DUPĂ DEMONSTRAȚIE

După 1976, numărul de configurații care trebuiau verificate a fost redus la jumătate, iar computerele au devenit mai rapide și mai puternice. Altfel spus, lumea matematică așteaptă încă o demonstrație mai scurtă și în stil tradițional. Între timp, teorema celor patru culori a dat naștere unor probleme importante în teoria grafurilor și, ca efect colateral, a pus la încercare însăși concepția matematicienilor despre ceea ce înseamnă o demonstrație matematică.

Idee de bază

patru culori sunt de ajuns.

31 Probabilitate

Care este șansa să ningă mâine? Cât de plauzibil ar fi să prind trenul de dimineață? Care este probabilitatea să câștig la loterie? Probabilitate, plauzibil, șansă – sunt cuvinte pe care le folosim în fiecare zi când vrem să știm răspunsurile. Sunt, totodată, cuvintele teoriei matematice a probabilității.

Teoria probabilității este importantă. Ea are legătură cu incertitudinea și este un ingredient esențial în evaluarea riscului. Dar cum ar putea fi cuantificată o teorie în care este vorba de nesiguranță? La urma urmei, nu este matematica o știință exactă?

Adevărata problemă este *cuantificarea* probabilității.

Să presupunem că luăm cel mai simplu exemplu de pe planetă, datul cu banul. Care este probabilitatea să obținem cap? Ne-am putea repezi și să spunem că răspunsul este $\frac{1}{2}$ (exprimat uneori ca 0,5 sau 50%). Dacă ne uităm la monedă, pornim de la premisa că nu este falsificată, adică șansa să cadă cap este egală cu șansa să cadă pajură, deci probabilitatea pentru cap este $\frac{1}{2}$.

Situațiile care implică monede, bile în cutii și alte exemple „mecanice" sunt relativ simple. Există două teorii principale privind repartizarea probabilităților. Simetria bilaterală a monedei poate fi una dintre abordări. O alta este abordarea frecvenței relative, în care facem experimentul de multe ori și numărăm de câte ori cade cap. Dar cât de mare înseamnă mare? Este ușor de crezut că atunci când comparăm de câte ori cade cap cu de câte ori cade pajură, raportul este de aproximativ 50:50, dar s-ar putea ca această proporție să se schimbe dacă experimentul continuă.

Dar ce-ar fi să căutăm o măsură perceptibilă a probabilității să ningă mâine? Vor fi din nou două rezultate posibile, ori ninge, ori nu, dar nu este deloc clar dacă situațiile sunt la fel de probabile, cum era pentru monede.

O evaluare a probabilității să ningă mâine va trebui să țină cont de starea vremii la momentul actual și de o mulțime de alți factori. Dar, chiar și așa, nu este posibil să indici un număr exact pentru această probabilitate. Chiar dacă s-ar putea să nu ajungem

CRONOLOGIE

anii 1650 d.Hr.	1785
Pascal și Huygens pun bazele teoriei probabilității	Condorcet aplică probabilitatea la analiza juriilor și a sistemelor electorale

la un număr propriu-zis, este foarte util să-i asociem un „grad de încredere" că probabilitatea va fi mică, medie sau mare. În matematică, probabilitatea este măsurată pe o scală de la 0 la 1. Probabilitatea unui eveniment imposibil este 0, iar certitudinea este 1. O probabilitate de 0,1 ar însemna o probabilitate mică, în timp ce 0,9 ar însemna o probabilitate mare.

ORIGINILE PROBABILITĂȚII

Teoria matematică a probabilității a devenit cunoscută în secolul al XVII-lea, odată cu discuțiile despre jocurile de noroc dintre Blaise Pascal, Pierre de Fermat și Antoine Gombaud (cunoscut și drept Cavalerul de Méré). Ei au descoperit faptul că un simplu joc te punea pe gânduri. Întrebarea Cavalerului de Méré a fost: ce este mai probabil, să dai „șase" din patru aruncări de zar sau „dublu șase" din 24 de aruncări cu două zaruri? Pe care variantă v-ați paria ultimul bănuț?

La vremea respectivă se considera că opțiunea mai bună era să pariezi pe doi de șase, pentru că sunt mai multe aruncări. Această opinie a fost spulberată, însă, de analiza probabilităților. Iată cum decurg calculele.

Aruncând un zar: probabilitatea de a nu obține șase la o singură aruncare este $^5/_6$, iar la patru aruncări, probabilitatea aceasta ar fi $^5/_6 \times {}^5/_6 \times {}^5/_6 \times {}^5/_6$, adică $(^5/_6)^4$. Deoarece rezultatele aruncărilor nu se influențează unul pe celălalt, ele sunt „independente" și putem înmulți probabilitățile. Așadar, probabilitatea de a obține cel puțin un șase este

$$1 - (^5/_6)^4 = 0{,}517746\ldots$$

Aruncând două zaruri: probabilitatea de a nu obține un dublu șase la o aruncare este $^{35}/_{36}$, iar la 24 de aruncări, aceasta are probabilitatea $(^{35}/_{36})^{24}$.

Așadar, probabilitatea de a obține cel puțin un dublu șase este

$$1 - (^{35}/_{36})^{24} = 0{,}491404\ldots$$

Putem duce acest exemplu puțin mai departe.

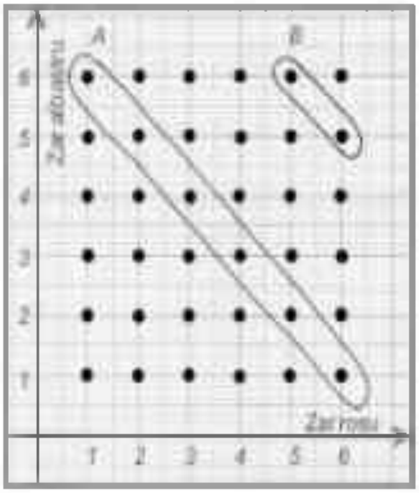
JOCUL DE ZARURI

Exemplul cu două zaruri stă la baza jocului modern Craps, jucat în cazinouri și la pariurile on-line. Când sunt aruncate două zaruri diferite (roșu și albastru), există

1812
Laplace își publică lucrarea în două volume *Teoria analitică a probabilităților*.

1912
Keynes își publică *Tratatul despre probabilitate*, care îi influențează teoriile economice și statistice.

1933
Kolmogorov prezintă probabilitatea în mod axiomatic.



Spațiu-eșantion (pentru două zaruri)

36 de rezultate posibile, care pot fi scrise în perechi (x, y) și reprezentate grafic ca 36 de puncte într-un set de axe x/y.

Să considerăm „evenimentul" A, când suma cifrelor obținute prin aruncarea celor două zaruri este 7. Există 6 combinații a căror sumă este 7, așa că putem descrie evenimentul prin

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

și să marcăm punctele pe diagramă. Probabilitatea lui A este 6 șanse din 36, ceea ce poate fi scris $Pr(A) = {}^{6}/_{36} = {}^{1}/_{6}$. Dacă notăm cu B evenimentul ca suma cifrelor indicate de cele două zaruri să fie 11, atunci avem evenimentul $B = \{(5,6), (6,5)\}$ și $Pr(B) = {}^{2}/_{36} = {}^{1}/_{18}$.

În jocul de zaruri Craps, în care două zaruri sunt aruncate pe o masă, poți câștiga sau pierde într-o primă etapă, dar pentru unele scoruri nu este totul pierdut și poți trece într-o a doua etapă. Poți câștiga din prima etapă dacă se produce evenimentul A sau B – aceasta se numește un „natural". Probabilitatea unui natural se obține prin însumarea probabilităților individuale ${}^{6}/_{36} + {}^{2}/_{36} = {}^{8}/_{36}$. Pierzi în prima etapă dacă arunci 2, 3 sau 12 (aceasta se numește „craps"). Un calcul similar celui de mai sus dă probabilitatea să pierzi în prima etapă ca fiind ${}^{4}/_{36}$. Dacă suma zarurilor aruncate este 4, 5, 6, 8, 9 sau 10 treci în a doua etapă, iar probabilitatea să se întâmple asta este ${}^{24}/_{36} = {}^{2}/_{3}$.

În lumea cazinourilor, probabilitățile sunt numite șanse. La Craps, pentru fiecare 36 de jocuri în care intri poți câștiga de 8 ori de la prima aruncare și să nu câștigi de 28 de ori, așadar șansele să câștigi la prima aruncare sunt 8 la 28, ceea ce este același lucru cu 1 la 3,5.

MAIMUȚA LA MAȘINA DE SCRIS

Alfred este o maimuță care trăiește la grădina zoologică din oraș. El are o mașină de scris veche, cu 26 de taste pentru literele alfabetului, o tastă pentru punct, una pentru virgulă, una pentru semnul întrebării și una pentru spațiu liber – 30 de taste în total. Stă într-un colț, plin de ambiții literare, dar metoda lui de scriere este bizară – lovește tastele la întâmplare.

Orice secvență de litere are o șansă să apară diferită de zero, așadar există posibilitatea ca el să scrie fără greșeală piesele lui Shakespeare. Mai mult, există o șansă (mai mică, e drept) ca el să scrie în continuare o traducere în franceză, apoi în spaniolă și în germană. Pentru o bună măsură, am putea continua cu posibilitatea ca el să scrie în continuare poeziile lui William Wordsworth. Șansa

să se întâmple acest lucru este minusculă, dar, cu siguranță, nu este zero. Acesta este punctul-cheie. Să vedem cât timp i-ar lua să scrie monologul lui Hamlet, începând cu începutul: „A fi sau". Ne imaginăm 8 căsuțe în care scriem literele, inclusiv spațiile libere:

A		f	i		s	a	u

Numărul de posibilități pentru completarea primei căsuțe este 30, pentru a doua 30 ș.a.m.d. Așadar, numărul de posibilități pentru completarea corectă a tuturor celor 8 căsuțe este 30 × 30 × 30 × 30 × 30 × 30 × 30 × 30. Șansa ca Alfred să scrie corect „A fi sau" este 1 la 6 561 × 10^{11}. Dacă Alfred lovește o tastă pe secundă, este de așteptat să îi ia 20 000 de ani ca să scrie „A fi sau", cu condiția ca o primată să fie atât de longevivă. Așadar, nu vă țineți răsuflarea în așteptarea operelor complete ale lui Shakespeare. În cea mai mare parte a timpului, Alfred nu va scrie decât nonsensuri de genul „xo,h?yt".

CUM S-A DEZVOLTAT TEORIA?

Când se aplică teoria probabilității, rezultatele pot fi controversate, dar măcar bazele matematice sunt suficient de sigure. În 1933, Andrei Nikolaevici Kolmogorov a jucat un rol important în definirea probabilității pe baze axiomatice – foarte asemănător cu modul în care au fost definite principiile geometriei, cu două milenii în urmă.

Probabilitatea este definită de următoarele axiome:

1. Probabilitatea tuturor ocurențelor este 1.
2. Probabilitatea are o valoare mai mare sau egală cu 0.
3. Când ocurențele nu coincid, probabilitățile lor pot fi însumate.

Din aceste axiome îmbrăcate în limbaj tehnic pot fi deduse proprietățile matematice ale probabilității. Conceptul de probabilitate poate fi aplicat pe scară largă. Mare parte din viața modernă nu se poate descurca fără el. Analiza de risc, sportul, sociologia, psihologia, proiectarea, finanțele ș.a.m.d. – lista este nesfârșită. Cine s-ar fi gândit că discuțiile despre pariuri care au lansat aceste idei, în secolul al XVII-lea, aveau să dea naștere unei discipline atât de complexe? Care erau șansele să se întâmple asta?

Idee de bază
sistemul secret al pariorilor

32 Teoria lui Bayes

Se știu puține despre primii ani ai reverendului Thomas Bayes. Născut în sud-estul Angliei, probabil în 1702, a devenit un preot nonconformist, dar și-a câștigat și reputația de matematician, iar, în 1742, a fost ales în Societatea Regală de la Londra. Celebrul lui *Eseu despre rezolvarea unei probleme în doctrina șanselor* a fost publicat în 1763, la doi ani după moartea sa. Lucrarea oferea o formulă pentru calculul probabilității inverse, probabilitatea „celeilalte variante", și a ajutat la crearea unui concept central al filosofiei bayesiene – probabilitatea condiționată.

Thomas Bayes le-a dat numele bayesienilor, adepții unui tip de statistică în opoziție cu statisticienii tradiționaliști, sau „frecvențiștii". Frecvențiștii adoptă o concepție despre probabilitate bazată pe date numerice brute. Concepția bayesienilor are în centru faimoasa formulă a lui Bayes și principiul că gradele subiective de încredere pot fi tratate ca probabilitate matematică.

PROBABILITATE CONDIȚIONATĂ

Imaginați-vă că impetuosul dr. De Ce are misiunea de a diagnostica pojarul la pacienții lui. Apariția petelor roșii este un indicator, dar diagnosticul nu este atât de simplu. Un pacient poate avea pojar fără să aibă pete roșii, iar alți pacienți pot avea pete roșii fără să sufere de pojar. Probabilitatea ca un pacient să aibă pete roșii dat fiind că are pojar este o probabilitate condiționată. Bayesienii folosesc o linie verticală pentru „dat fiind", așa că, dacă scriem

prob (un pacient are pete | pacientul are pojar)

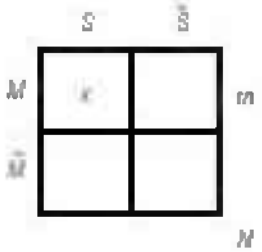
este vorba despre probabilitatea ca un pacient să aibă pete pentru că este bolnav. Valoarea *prob* (un pacient are pete | pacientul are pojar) nu este egală cu *prob* (un pacient are pojar | pacientul are pete). Privitor la relația dintre ele, una este probabilitatea inversului celeilalte. Formula lui Bayes este formula prin care una poate fi calculată din cealaltă. Nimic nu le place mai mult matematicienilor decât să folosească notații pentru diverse lucruri. Să spunem, așadar, că evenimentul de

CRONOLOGIE

1763 d.Hr.
Este publicată lucrarea despre probabilitate a lui Bayes.

1937
De Finetti promovează probabilitatea subiectivă ca alternativă la teoria frecvenței.

a avea pojar este M, iar evenimentul ca un pacient să aibă pete roșii îl notăm cu S. Simbolul $\bar{S}$ este evenimentul de a nu avea pete, iar $\bar{M}$ de a nu avea pojar. Putem vedea aceste simboluri într-un tabel.



Tabelul care prezintă structura logică a ocurenței petelor și a pojarului

Aceasta îi spune doctorului De Ce că există x pacienți care au pojar și pete, m pacienți care au pojar, în timp ce numărul tuturor pacienților lui este N. Din diagramă, el poate vedea că probabilitatea ca un pacient să aibă și pojar, și pete este x/N, iar probabilitatea să aibă pojar este m/N. Probabilitatea condiționată, adică probabilitatea ca un pacient să aibă pete dat fiind că are pojar, scrisă $prob(S \mid M)$, este x/m. Punând toate acestea cap la cap, dr. De Ce obține probabilitatea ca un pacient să aibă și pojar, și pete:

$$prob(M \,\&\, S) = \frac{x}{N} = \frac{x}{m} \times \frac{m}{N}$$

sau

$$prob(M \,\&\, S) = prob(S \mid M) \times prob(M)$$

și, similar,

$$prob(M \,\&\, S) = prob(M \mid S) \times prob(S)$$

FORMULA LUI BAYES

Punând semnul egal între expresiile pentru $prob(M \,\&\, S)$, obținem formula lui Bayes, relația dintre probabilitatea condiționată și inversul ei. Dr. De Ce va avea o idee destul de precisă despre $prob(S \mid M)$, probabilitatea ca, dacă un pacient are pojar, să aibă și pete. Probabilitatea condiționată inversă este cea care îl interesează, de fapt, pe doctorul nostru, și anume estimarea dacă un pacient are pojar atunci când se prezintă cu pete. Calculul acesteia reprezintă problema inversă și este genul de problemă tratată de Bayes în eseul lui. Ca să determinăm probabilitățile, trebuie să introducem niște numere. Vor fi unele subiective, dar important este să vedem cum se combină. Probabilitatea ca, dacă pacienții au pojar, să aibă pete, $prob(S \mid M)$ va fi mare, să zicem 0,9, iar dr. De Ce va avea sentimentul că așa și trebuie să fie. Îndrăznețul doctor s-ar putea să aibă, de asemenea, o idee și despre procentul din populație care are pojar, să zicem 20%. Aceasta este exprimată ca $prob(M) = 0,2$.

$$prob\ (M \mid S) = \frac{prob\ (M)}{prob\ (S)} \times prob\ (S \mid M)$$

Formula lui Bayes

1950
Jimmy Savage și Dennis Lindley lansează mișcarea bayesiană modernă.

anii 1950
Este folosit pentru prima dată termenul „bayesian".

1992
Este fondată Societatea Internațională pentru Analiză Bayesiană

Mai avem nevoie de o singură informație, și anume *prob*(*S*), procentul din populație care are pete roșii. Acum probabilitatea ca un individ să aibă pete roșii este probabilitatea ca respectivul să aibă pojar și pete, plus probabilitatea ca omul să nu aibă pojar, dar să aibă pete. Din relațiile noastre chele, *prob*(*S*) = 0,9 × 0,2 + 0,15 × 0,8 = 0,3. Substituind aceste valori în formula lui Bayes, obținem:

$$prob(M \mid S) = \frac{0{,}2}{0{,}3} \times 0{,}9 = 0{,}6$$

Concluzia este că, dintre toți pacienții cu pete pe care i-a consultat, doctorul a diagnosticat corect pojarul în 60% dintre cazuri. Să presupunem acum că doctorul primește mai multe informații despre tipul de pojar, astfel încât probabilitatea de depistare crește. Altfel spus, *prob*(*S* | *M*), probabilitatea de a avea pete din cauza pojarului, crește de la 0,9 la 0,95, iar *prob*(*S* | $\bar{M}$), probabilitatea de a avea pete din altă cauză, scade de la 0,15 la 0,1. Cum îmbunătățește această schimbare rata de depistare a pojarului? Care este noua *prob*(*M* | *S*)? Cu această nouă informație, *prob*(*S*) = 0,95 × 0,2 + 0,1 × 0,8 = 0,27, așadar, conform formulei lui Bayes, *prob*(*M* | *S*) este 0,2 împărțit la *prob*(*S*) = 0,27 și apoi totul înmulțit cu 0,95, ceea ce dă rezultatul 0,704. Așadar, cu această informație îmbunătățită, dr. De Ce poate diagnostica 70% dintre cazuri. Dacă probabilitățile s-ar schimba la 0,99, respectiv 0,01, atunci probabilitatea detecției, *prob*(*M* | *S*), devine 0,961, așadar șansa unei diagnosticări corecte în acest caz ar fi 96%.

BAYESIENI MODERNI

Statisticianul tradițional nu ar avea mare lucru de obiectat la folosirea formulei lui Bayes acolo unde probabilitatea poate fi măsurată. Neînțelegerile pornesc de la interpretarea probabilității ca grade de încredere sau, așa cum este definită uneori, probabilitate subiectivă.

Într-o sală de judecată, chestiunile de vină sau de nevinovăție sunt decise uneori de „echilibrul probabilităților". Statisticianul care lucrează cu frecvențe are o problemă să asocieze un înțeles probabilității ca un inculpat să fie vinovat de o infracțiune. Nu așa stau lucrurile pentru un bayesian, care nu are nici o problemă în a amesteca în joc și sentimentele. Cum funcționează asta? Dacă trebuie să folosim metoda echilibrului probabilităților pentru a judeca vina sau nevinovăția, să vedem cum putem jongla cu probabilitățile. Iată un posibil scenariu.

Imediat după ce a luat contact cu un caz, la tribunal, un jurat a decis că probabilitatea ca acuzatul să fie vinovat este de aproximativ 1 la 100. În timpul deliberărilor din sala juriului, jurații sunt chemați înapoi, la tribunal, să audă dovezi suplimentare prezentate de acuzare. S-a găsit o armă în casa inculpatului, iar procurorul susține că probabilitatea descoperirii crește până la 0,95 dacă

acuzatul este vinovat, dar dacă ar fi nevinovat, probabilitatea găsirii armei crimei ar fi doar 0,1. Probabilitatea găsirii unei arme în casa inculpatului este, așadar, mult mai mare dacă acesta este vinovat decât dacă este inocent. Întrebarea cu care se confruntau jurații era cum să-și modifice părerea despre cel judecat, în lumina acestei noi informații? Folosind din nou notația noastră, *G* este evenimentul în care inculpatul este vinovat, iar *E* este evenimentul obținerii acelei noi dovezi. Juratul făcuse o estimare inițială conform căreia $prob(G) = {}^{1}/_{100}$ sau 0,01. Această probabilitate este numită **probabilitatea anterioară**. Probabilitatea reevaluată $prob(G \mid E)$ este probabilitatea vinovăției revizuită în lumina noii dovezi *E* și este numită **probabilitate posterioară**. Formula lui Bayes în forma

$$prob(G \mid E) = \frac{prob(E \mid G)}{prob(E)} \times prob(G)$$

prezintă ideea actualizării probabilității anterioare, care devine probabilitate posterioară, $prob(G \mid E)$. La fel cum am calculat $prob(S)$ în exemplul medical, putem calcula $prob(E)$ și ajungem la

$$prob(G \mid E) = \frac{0{,}95}{0{,}95 \times 0{,}01 + 0{,}1 \times 0{,}99} \times 0{,}01 = 0{,}088$$

Aceasta devine o dilemă pentru jurat, deoarece estimarea inițială de 1% probabilitate de vină crește la aproape 9%. Dacă acuzarea ar fi făcut afirmația mai importantă că probabilitatea găsirii armei incriminante era de 0,99 dacă inculpatul este vinovat, dar că probabilitatea găsirii armei era de numai 0,01 în cazul nevinovăției, atunci repetarea calculelor cu formula lui Bayes arată că jurații ar trebui să-și revizuiască opinia de la 1% la 50%.

Folosirea formulei lui Bayes în astfel de situații a fost ținta criticilor. Principalul atac s-a referit la modul în care se ajunge la probabilitatea anterioară. În favoarea analizei bayesiene stă faptul că ea reprezintă un mod de a trata probabilitățile subiective și de a le actualiza în funcție de dovezi. Metoda bayesiană are aplicații în domenii diverse, cum ar fi știința, prognozele meteo și criminalistica. Susținătorii îi invocă soliditatea și pragmatismul cu care abordează incertitudinile. Viitorul îi rezervă încă multe.

Idee de bază
actualizarea convingerilor folosind dovezi

33 Problema zilei de naștere

Imaginați-vă că stați în autobuz și nu aveți nimic altceva de făcut decât să-i numărați pe ceilalți pasageri care merg la muncă dimineața devreme. Cum este foarte probabil ca pasagerii să nu aibă legătură unul cu celălalt, putem presupune, fără prea mare risc să greșim, că zilele de naștere sunt distribuite la întâmplare pe durata întregului an. Cu tine, în autobuz sunt doar 23 de pasageri. Nu este mult, dar suficient ca să susținem că există o șansă mai mare de zero ca doi pasageri să aibă aceeași zi de naștere. Credeți asta? Milioane de oameni nu cred, dar este absolut adevărat. Chiar și unui cercetător experimentat în teoria probabilităților, William Feller, i s-a părut uimitor.

Autobuzul este prea mic pentru experimentul nostru, așa că reluăm argumentația într-o sală mare. Câți oameni trebuie să se adune în încăpere, ca să avem certitudinea că doi dintre ei au aceeași zi de naștere? Sunt 365 de zile într-un an standard (ignorăm anii bisecți, ca să nu complicăm inutil lucrurile), așadar, dacă în încăperea noastră se află 366 de persoane, cel puțin două dintre ele au cu siguranță aceeași zi de naștere. Este imposibil ca absolut toți să aibă zile de naștere diferite.

Acesta este principiul cuiburilor pentru porumbei: dacă $n + 1$ porumbei ocupă n cuiburi, unul dintre cuiburi trebuie să conțină mai mult de un singur porumbel. Dacă ar fi 365 de oameni, nu am putea fi siguri că există măcar o zi de naștere comună, deoarece fiecare aniversare ar putea să cadă într-o zi diferită a anului. Totuși, dacă iei la întâmplare 365 de oameni, este foarte puțin probabil să se întâmple așa ceva, iar probabilitatea să nu fie nici măcar doi oameni cu aceeași zi de naștere este infimă. Chiar dacă în încăpere sunt doar 50 de oameni, există o șansă de 96,5% ca doi dintre ei să aibă aceeași zi de naștere.

CRONOLOGIE

1654 d.Hr.	1657	1718
Blaise Pascal pune bazele teoriei probabilităților	Christiaan Huygens scrie prima lucrare publicată despre probabilitate	Abraham de Moivre publică *Doctrina șanselor*, urmată de ediții mai extinse în 1738 și 1756

Dacă reducem și mai mult numărul de oameni, scade și probabilitatea ca doi dintre ei să aibă aceeași zi de naștere. Descoperim că 23 de oameni este numărul pentru care probabilitatea este mai mare decât $^{1}/_{2}$, iar pentru 22 de oameni coboară sub $^{1}/_{2}$. Numărul 23 este valoarea critică. Chiar dacă răspunsul la problema clasică a zilei de naștere pare surprinzător, nu este un paradox.

PUTEM SĂ DEMONSTRĂM?

Cum putem să ne convingem? Să alegem la întâmplare o persoană. Probabilitatea ca o altă persoană să aibă aceeași zi de naștere cu ea este $^{1}/_{365}$, astfel încât probabilitatea ca aceste două persoane să nu aibă aceeași zi de naștere este $1 - {}^{1}/_{365})$, adică $^{364}/_{365}$. Probabilitatea ca încă o persoană selectată la întâmplare să aibă ziua de naștere comună cu primele două este $^{2}/_{365}$, așadar probabilitatea ca această persoană să nu aibă aniversarea comună cu nici una din primele două este $1 - {}^{2}/_{365}$ (adică $^{363}/_{365}$). Probabilitatea ca toate cele trei persoane să aibă aniversări distincte se obține prin înmulțirea acestor două probabilități, sau $(^{364}/_{365}) \times (^{363}/_{365})$, care este 0,9918.

Continuând în același mod pentru 4, 5, 6... persoane, obținem paradoxul zilelor de naștere. Când ajungem la 23 de oameni, calculatorul nostru de buzunar arată 0,4927 ca fiind probabilitatea să nu existe o aniversare comună. Negarea lui „nici unul dintre ei nu are aceeași zi de naștere" este „cel puțin doi dintre ei au aceeași zi de naștere", iar probabilitatea acesteia ar fi $1 - 0{,}4927 = 0{,}5073$, puțin mai mare decât crucialul $^{1}/_{2}$.

Dacă $n = 22$, probabilitatea ca doi oameni să aibă aceeași zi de naștere este 0,4757, ceea ce este imediat sub $^{1}/_{2}$. Aparența paradoxală a problemei zilei de naștere este strâns legată de limbaj. Rezultatul face o afirmație despre doi oameni care au aceeași zi de naștere, dar nu ne spune care sunt acești doi oameni. Nu știm nici despre care zi din an este vorba. Dacă în cameră se află un domn Trevor Thomson, a cărui zi de naștere este pe 8 martie, ar trebui pusă o întrebare diferită.

CÂTE ZILE DE NAȘTERE COINCID CU A DOMNULUI THOMSON?

Pentru această întrebare, calculul este diferit. Probabilitatea ca dl Thomson să nu aibă aceeași zi de naștere cu altă persoană este $^{364}/_{365}$, așadar probabilitatea ca el să nu aibă aceeași zi de naștere cu oricare altul din ceilalți $n - 1$ oameni din încăpere este $(^{364}/_{365})^{n-1}$. Iar probabilitatea ca dl Thomson să aibă aceeași zi de naștere cu altcineva este 1 minus această valoare.

anii 1920

Bose consideră teoria luminii a lui Einstein ca o problemă de ocupare

1939

Richard von Mises propune problema zilei de naștere

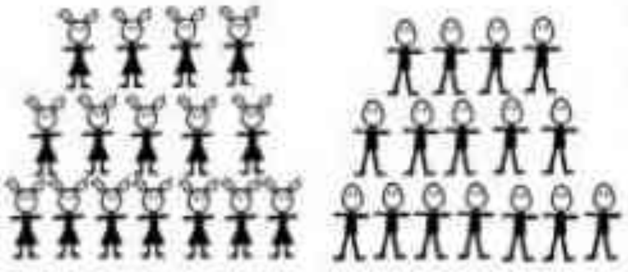
Dacă facem calculele pentru $n = 23$, această probabilitate este doar 0,061151, așadar există o șansă de doar 6% ca altcineva să aibă ziua de naștere pe 8 martie, la fel ca dl Thomson. Dacă mărim valoarea lui n, va crește și această probabilitate. Dar trebuie să mergem până la $n = 254$ (incluzându-l pe dl Thomson în numărătoare) pentru ca probabilitatea să fie mai mare decât $^1/_2$. Pentru $n = 254$, valoarea ei este 0,5005. Acesta este punctul critic, deoarece $n = 253$ va da valoarea 0,4991, mai mică decât $^1/_2$. Va fi nevoie de o adunare de 254 de oameni în încăpere, pentru o șansă mai mare decât $^1/_2$, ca dl Thomson să aibă aceeași zi de naștere ca o altă persoană. Acest rezultat este parcă mai în ton cu intuiția noastră decât uimitoarea soluție a problemei clasice a zilei de naștere.

ALTE PROBLEME CU ZILE DE NAȘTERE

Problema zilei de naștere a fost generalizată în multe feluri. Una dintre abordări este să ne gândim la trei oameni care au aceeași zi de naștere. În acest caz, va fi nevoie de 88 de oameni ca să existe o șansă rezonabilă să găsim trei persoane cu aceeași zi de naștere. Grupurile corespunzătoare sunt și mai mari dacă se cere ca patru, cinci sau mai multe persoane să aibă aceeași zi de naștere. Dacă se adună 1 000 de oameni, de exemplu, există o șansă rezonabilă ca nouă dintre ei să aibă aceeași zi de naștere.

Alte incursiuni în problematica zilei de naștere vizează aniversările apropiate. În acest tip de problemă, vorbim despre o potrivire dacă una dintre zilele de naștere se află la un anumit număr de zile de altă aniversare. Reiese că, dacă în cameră sunt doar 14 oameni, există o șansă rezonabilă ca doi dintre ei să aibă aceeași zi de naștere sau la o zi distanță una de alta.

O variantă care necesită instrumente matematice mai sofisticate este problema zilei de naștere pentru băieți și fete: dacă într-o clasă avem un număr egal de băieți și de fete, care ar fi grupul minim care ar da o șansă rezonabilă ca o fată și un băiat să aibă aceeași zi de naștere?



Fete Băieți

Rezultatul este că o clasă de 32 de copii (16 fete și 16 băieți) ar da grupul minim. Acesta poate fi comparat cu numărul 23 din problema clasică a zilei de naștere.

Schimbând ușor întrebarea, putem obține alte noutăți (dar la care nu este ușor de răspuns). Să presupunem că avem o coadă lungă la un concert al lui Bob Dylan și că oamenii se așază în rând aleatoriu. Cum suntem interesați de zilele de naștere, putem exclude posibilitatea ca gemeni sau

tripleți să sosească împreună. La intrare, fanii sunt întrebați care sunt zilele lor de naștere. Întrebarea matematică este următoarea: câți oameni v-ați aștepta să fie lăsați să intre, până când doi oameni așezați la rând unul după altul vor avea aceeași zi de naștere? O altă întrebare: câți oameni vor intra în sala de concert, până să apară o persoană care să aibă aceeași zi de naștere cu dl Trevor Thomson (8 martie)?

Calculul pornește de la presupunerea că zilele de naștere sunt uniform distribuite și că fiecare zi de naștere are o șansă egală să apară pentru o persoană selectată aleatoriu. Rezultatele experimentale arată că acest lucru nu este tocmai adevărat (mai mulți oameni sunt născuți în lunile de vară), dar este suficient de aproape pentru ca soluția să fie aplicabilă.

Problemele cu zile de naștere sunt probleme de ocupare, în care matematicienii se gândesc la plasarea unor bile în celule. În problema zilelor de naștere, numărul de celule este 365 (acestea sunt identificate cu posibile zile de naștere), iar bilele care sunt plasate aleatoriu în celule reprezintă oamenii. Problema poate fi simplificată la investigarea probabilității ca două bile să cadă în aceeași celulă. Pentru problema cu fete și băieți, bilele sunt de două culori.

Matematicienii nu sunt singurii interesați de problema zilelor de naștere. Satyendra Nath Bose a fost atras de teoria luminii a lui Albert Einstein, bazată pe fotoni. El a trecut dincolo de liniile tradiționale de cercetare și a judecat problema de fizică în termenii unei probleme de ocupare. Pentru el, celulele nu erau zilele anului, ca în problema zilei de naștere, ci niveluri de energie a fotonilor. În loc să pună în celule oameni, ca la problema zilei de naștere, el a distribuit numere de fotoni. Există numeroase aplicații ale problemelor de ocupare în alte științe. În biologie, de exemplu, răspândirea bolilor contagioase poate fi modelată ca o problemă de ocupare – celulele, în acest caz, sunt arealuri geografice, bilele sunt boli, iar întrebarea este cum se grupează aceste boli în celule.

Lumea este plină de coincidențe uimitoare, dar numai matematica ne oferă modul de a le calcula probabilitatea. Din acest punct de vedere, problema clasică a zilei de naștere este doar vârful aisbergului și reprezintă un excelent punct de inițiere în matematica serioasă, cu aplicații importante.

Idee de bază
calculul coincidențelor

34 Distribuții

Ladislaus J. Bortkiewicz era fascinat de tabelele de mortalitate. Pentru el nu erau un subiect macabru, ci un teren de asiduă cercetare științifică. A devenit celebru pentru că a numărat cavaleriștii din armata prusacă uciși de lovituri de copită. Apoi a fost Frank Benford, un inginer electrotehnist care număra primele cifre din diverse seturi de date numerice, ca să vadă câte erau 1, 2, 3 ș.a.m.d. Și George Kingsley Zipf, care preda germana la Harvard și care, interesat fiind de filologie, analiza ocurența diferitelor cuvinte în texte.

Toate aceste exemple sunt legate de măsurarea probabilităților unor evenimente. Care este probabilitatea ca *x* ofițeri de cavalerie să primească, într-un an, lovituri mortale de copită? Lista probabilităților pentru fiecare valoare a lui *x* se numește distribuție a probabilităților. Este, totodată, o distribuție discretă, pentru că *x* ia doar valori izolate – există spații goale între valorile de interes ale lui *x*. Poți avea trei sau patru cavaleriști prusaci doborâți de o lovitură mortală de copită, dar nu $3^1/_2$. Așa cum vom vedea, în cazul distribuției Benford suntem interesați doar de apariția cifrelor 1, 2, 3, ..., iar pentru distribuția Zipf, poți avea cuvântul „el" pe poziția a opta în lista celor mai folosite cuvinte, dar nu pe poziția 8,23.

VIAȚĂ ȘI MOARTE ÎN ARMATA PRUSACĂ

Bortkiewicz a strâns registrele de la 10 corpuri de armată, pe o perioadă de 20 de ani, obținând date cumulate pentru 200 de ani. El s-a uitat la numărul de morți (aceasta era ceea ce matematicienii numesc o variabilă) și la numărul de ani în care a apărut numărul de morți respectiv. De exemplu, au existat 109 ani în care nu s-a produs nici un deces, în timp ce într-un an au fost patru morți. Într-un anumit an, Corpul C a avut patru morți în cazarmă. Cum este distribuit numărul de morți? Strângerea informațiilor este una dintre părțile activității statisticianului – ieșirea pe teren, înregistrând rezultatele. Bortkiewicz a obținut următoarele date:

CRONOLOGIE

1837 d.Hr.
Simeon-Denis Poisson descrie distribuția care-i poartă numele.

1881
Newcomb descoperă ceea ce va fi cunoscut drept legea lui Benford.

1898
Bortkiewicz studiază morțile în cavaleria Prusiei.

număr de morți	0	1	2	3	4
frecvență	109	65	22	3	1

Din fericire, moartea din cauza unei lovituri de copită este un eveniment rar. Cea mai potrivită tehnică pentru modelarea felului în care se produc evenimentele rare constă în folosirea a ceva ce se numește distribuția Poisson. Cu această tehnică, ar fi putut oare Bortkiewicz să prezică rezultatele fără să facă vizite la grajduri? Distribuția teoretică Poisson spune că probabilitatea ca numărul de morți (pe care îl vom numi X) să aibă valoarea x este dată de formula lui Poisson, unde e este acel număr special despre care am discutat mai devreme în asociere cu creșterea (vezi p. 24), iar semnul exclamării înseamnă factorial – numărul respectiv înmulțit cu toate numerele întregi dintre el și 1 (vezi p. 26). Litera grecească lambda, scrisă λ, este media numărului de morți. Trebuie să găsim această medie pe cei 200 de ani ai noștri, așadar înmulțim 0 morți cu 109 ani (ceea ce dă 0), 1 mort cu 65 ani (ceea ce dă 65), 2 morți cu 22 ani (ceea ce dă 44), 3 morți cu 3 ani (ceea ce dă 9) și 4 morți cu 1 an (ceea ce dă 4), apoi adunăm toate acestea (obținând 122) și împărțim la 200. Așadar, numărul mediu de morți pe an însumați este $^{122}/_{200} = 0{,}61$.

$$e^{-\lambda}\lambda^{x}/x\,!$$

Formula Poisson

Probabilitățile teoretice (pe care le vom numi p) pot fi găsite substituind valorile $r = 0, 1, 2, 3$ și 4 în formula Poisson. Rezultatele sunt:

număr de morți	0	1	2	3	4
probabilități, p	0,543	0,331	0,101	0,020	0,003
număr de morți prognozat, 200 × p	108,6	66,2	20,2	4,0	0,6

Pare că distribuția teoretică este un model foarte potrivit pentru datele experimentale strânse de Bortkiewicz.

PRIMELE NUMERE

Dacă analizăm ultimele cifre ale numerelor de pe o coloană din cartea de telefon, ne-am aștepta ca 0, 1, 2, ..., 9 să fie distribuite uniform. Cifrele apar aleatoriu, cu șanse egale. În 1938, inginerul electrotehnist Frank Benford a descoperit că acest lucru nu era adevărat pentru primele cifre din anumite seturi de date. De fapt, el a redescoperit o lege remarcată pentru prima dată de astronomul Simon Newcomb, în 1881.

1938 Benford reafirmă legea distribuției primelor cifre.

1950 Zipf deduce o formulă care leagă folosirea cuvintelor de vocabular.

2003 Distribuția Poisson este folosită pentru analiza rezervelor de pește din Atlanticul de Nord.

lei, am făcut un mic experiment. M-am uitat într-un ziar, la tabelele de schimb valutar. Erau rate de schimb de genul 2,119, însemnând că ai nevoie de 2,119$ (dolari americani) ca să cumperi 1£ (liră sterlină). La fel, aveai nevoie de 1,59€ (euro) ca să cumperi 1£ și 15,390 HK$ (dolari Hong Kong) ca să cumperi 1£. Parcurgând toate datele și înregistrând de câte ori apare o anumită cifră pe prima poziție, am obținut următorul tabel:

prima cifră	1	2	3	4	5	6	7	8	9	total
număr de apariții	18	10	3	1	3	5	7	2	1	50
procent, %	36	20	6	2	6	10	14	4	2	100

Aceste rezultate susțin legea lui Benford, care spune că, pentru anumite categorii de date, 1 apare ca primă cifră în 30% dintre date, 2 în 18% dintre date ș.a.m.d. Cu siguranță, nu este vorba despre distribuția uniformă care apare la ultima cifră din numerele de telefon.

Nu este evident de ce atât de multe seturi de date urmează legea lui Benford. În secolul al XIX-lea, când Simon Newcomb a observat-o în tabelele matematice, nu ar fi avut cum să prevadă cât va fi de răspândită.

Situațiile în care poate fi detectată distribuția lui Benford includ tabelele de rezultate sportive, datele de la bursă, numerele caselor, populația țărilor și lungimile fluviilor. Unitățile de măsură nu sunt importante – nu contează dacă lungimile fluviilor sunt măsurate în metri sau în mile. Legea lui Benford are aplicații practice. Odată ce s-a descoperit că datele contabile urmează și ele această lege, a devenit mai ușor să se depisteze informațiile false și să se detecteze fraude.

CUVINTE

Una dintre numeroasele preocupări ale lui G.K. Zipf era practica deloc obișnuită a numărării cuvintelor. A rezultat că primele zece cuvinte cele mai populare în limba engleză sunt monosilabicele:

poziție	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cuvânt	the	of	and	to	a	in	that	it	is	was

A descoperit aceasta luând câte un fragment amplu dintr-o largă serie de texte scrise și numărând, pur și simplu, cuvintele. Cuvântul care apare cel mai des a primit rangul 1, următorul rangul 2 ș.a.m.d. Pot exista mici variații ale popularității în funcție de tipul textelor analizate, dar clasamentul nu se schimbă foarte mult.

Nu este surprinzător că „the" este cuvântul cel mai folosit și „of" este pe locul doi. Lista continuă și poate vreți să știți că „among" apare pe locul 500, iar „neck" pe locul 3 000. Vom lua în considerare doar cuvintele de pe primele zece locuri. Dacă luați un text la întâmplare și numărați cuvintele, veți obține mai mult sau mai puțin aceleași cuvinte, în aceeași ordine. Faptul surprinzător este că ordinea în clasament influențează și numărul de apariții ale cuvintelor respective în text. Cuvântul „the" apare de două ori mai des decât cuvântul „of" și de trei ori mai des decât „and" ș.a.m.d. Numărul real este dat de o formulă bine cunoscută. Aceasta este o lege experimentală și a fost descoperită de Zipf din analiza datelor. Legea teoretică a lui Zipf spune că procentul de apariții pentru un cuvânt de rangul r este dat de

$$\frac{k}{r} \times 100$$

unde numărul k depinde doar de dimensiunea vocabularului autorului. Dacă un autor stăpânește toate cuvintele din limba engleză, care sunt un milion la număr, după unele estimări, valoarea lui k ar fi aproximativ 0,0694. Conform formulei din legea lui Zipf, cuvântul „the" reprezintă aproximativ 6,94% din toate cuvintele din text. La fel, cuvântul „of" ar reprezenta jumătate din acestea, adică 3,47% din cuvinte. Un eseu de 3 000 de cuvinte, scris de acest autor talentat, ar conține 208 apariții ale cuvântului „the" și 104 apariții ale cuvântului „of".

Pentru scriitorii care stăpânesc doar 20 000 de cuvinte, valoarea lui k crește la 0,0954, așadar vor fi 286 de apariții ale lui „the" și 143 de apariții ale cuvântului „of". Cu cât vocabularul este mai limitat, cu atât mai des veți vedea apărând cuvântul „the".

PRIVIND ÎN GLOBUL DE CRISTAL

Fie că este vorba despre Poisson, Benford sau Zipf, toate aceste distribuții ne permit să facem predicții. S-ar putea să nu fim în măsură să prezicem cu certitudine, dar este mai bine să știi cum se distribuie probabilitățile decât să bâjbâi prin întuneric. Dacă la acestea trei adăugăm și alte distribuții, cum ar fi cea binomială, binomială negativă, geometrică, hipergeometrică și multe altele, statisticianul are din abundență instrumente cu care să analizeze o serie bogată de activități umane.

Idee de bază
prezicând cât de multe

35 Curba normală

Curba „normală" joacă un rol esențial în statistică. A fost numită echivalentul dreptei în matematică. Cu siguranță are proprietăți matematice importante, dar, dacă analizăm efectiv un set de date brute, vom descoperi foarte rar că ele urmează exact o curbă normală.

Curba normală este prescrisă de o formulă matematică specifică, prin care se obține o curbă în formă de clopot, o curbă care are o „cocoașă" și se aplatizează lin de ambele părți ale acesteia. Importanța curbei normale stă mai puțin în natură și mai mult în teorie, iar istoria ei este veche. În 1733, Abraham de Moivre, un hughenot francez fugit în Anglia ca să scape de persecuția religioasă, a introdus-o în legătură cu cercetările lui de analiză a șanselor. Pierre Simon Laplace a publicat rezultate despre ea, iar Carl Friedrich Gauss a folosit-o în astronomie, unde este pomenită uneori ca legea gaussiană a erorii.

Adolphe Quetelet a folosit curba normală în studiile lui sociologice publicate în 1835, în care a măsurat abaterea de la „omul mediu" prin curba normală. În alte experimente, el a analizat înălțimea recruților din armata franceză și circumferința pieptului soldaților scoțieni, presupunând că ele urmează curba normală. În zilele acelea, exista convingerea bine înrădăcinată că majoritatea fenomenelor erau „normale" din acest punct de vedere.

PETRECEREA

Să presupunem că Georgina merge la o petrecere, iar gazda, Sebastian, o întreabă dacă a venit de departe. Ea și-a dat seama ulterior că era o întrebare foarte utilă la petreceri – este valabilă pentru oricine și invită la un răspuns. Nu este nici solicitantă și poate da tonul, dacă se leagă greu conversația.

În ziua următoare, încă ușor mahmură, Georgina s-a dus la serviciu și, pe drum, s-a întrebat dacă și colegii ei veneau de departe la muncă. În discuțiile din pauza de prânz a aflat că unii locuiau după colț, alții veneau de la zeci de kilometri distanță – era un

CRONOLOGIE

1733 d.Hr.

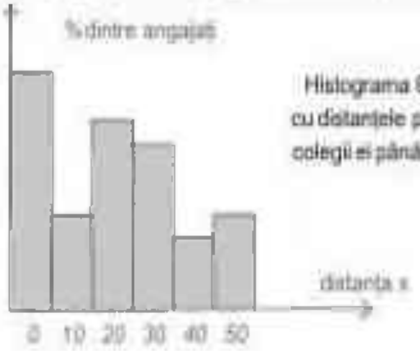
De Moivre publică o lucrare despre curba normală ca o aproximare a distribuției binomiale.

1820

Gauss a folosit distribuția normală (curba gaussiană) în astronomie ca o lege a erorilor.

grad mare de variabilitate. A profitat de faptul că era șefa departamentului de resurse umane la o mare companie și, în chestionarul pe care îl dădea anual angajaților, a adăugat întrebarea: „Ce distanță ai parcurs astăzi până la muncă?" Voia să afle distanța medie pe care o parcurg până la birou angajații companiei. Când Georgina a pus rezultatele pe o histogramă, distribuția nu avea o formă anume, dar cel puțin a reușit să calculeze distanța medie parcursă.

Media s-a dovedit a fi 20 km. Matematicienii notează aceasta cu litera grecească miu, scrisă μ, așadar în acest caz μ = 20. Variabilitatea populației este notată cu litera grecească sigma, scrisă σ, care este numită uneori deviația standard. Dacă deviația



Histograma Georginei cu distanțele parcurse de colegii ei până la serviciu

standard este mică, datele sunt apropiate unele de altele și au variabilitate mică, dar, dacă este mare, datele sunt împrăștiate. Analistul de marketing al companiei, care avea pregătire de statistician, i-a arătat Georginei că ar fi putut să ajungă la o valoare foarte apropiată de 20 prin eșantionare. Nu era nevoie să-i întrebe pe toți angajații. Această tehnică de estimare depinde de Teorema Limitei Centrale.

Să luăm un eșantion ales la întâmplare dintre angajații companiei. Cu cât este eșantionul mai mare, cu atât mai bine, dar cu 30 de oameni rezultatul va fi destul de bun. Pentru că au fost aleși la întâmplare, este foarte probabil să găsim printre ei și oameni care locuiesc după colț, și unii care vin de la distanțe mari. Când calculăm distanța medie pentru eșantionul nostru, efectul distanțelor mari va fi compensat de distanțele mici.

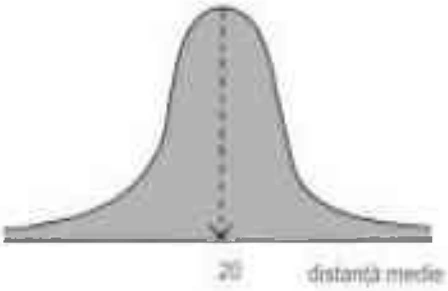
Matematicienii scriu media eșantionului ca $\bar{x}$, citit „x barat". În cazul Georginei, este foarte probabil ca valoarea lui să fie apropiată de 20, media pentru întreaga populație. Deși este posibil, este puțin probabil ca media pentru eșantion să fie foarte mică sau foarte mare.

1835
Quetelet folosește curba normală pentru a măsura divergența față de o persoană medie.

anii 1870
Distribuția capătă numele de „normală".

1901
Aleksandr Liapunov demonstrează riguros Teorema Limitei Centrale, folosind funcții caracteristice.

Teorema Limitei Centrale este unul dintre motivele pentru care curba normală este importantă în ochii statisticienilor. Ea spune că distribuția reală a mediilor pe eșantioane aproximează o curbă normală, oricare ar fi distribuția lui x. Ce înseamnă asta? În cazul Georginei, x reprezintă distanța până la locul de muncă și este media pe un eșantion.



Cum este distribuită media pe eșantion

Distribuția lui x în histograma Georginei nu seamănă deloc cu o curbă în formă de clopot, dar distribuția lui are această formă și este centrată pe $\mu = 20$.

Acesta este motivul pentru care putem folosi media pe un eșantion $\bar{x}$ ca o estimare a mediei pe întreaga populație μ. Variabilitatea mediilor pe mai multe eșantioane este bonus. Dacă variabilitatea valorilor x este deviația standard σ, variabilitatea lui $\bar{x}$ este $^{\sigma}/_{\sqrt{n}}$, unde n este mărimea eșantionului selectat. Cu cât este eșantionul mai mare, cu atât mai îngustă va fi curba normală și cu atât mai bună va fi estimarea lui μ.

ALTE CURBE NORMALE

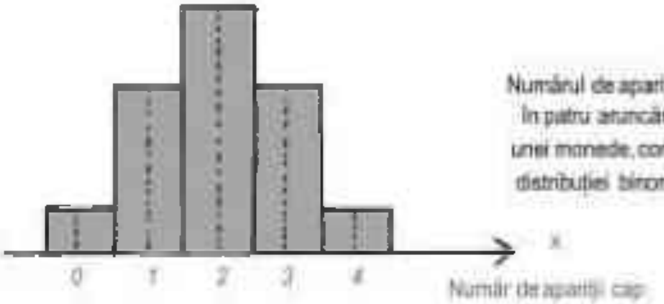
Să facem un experiment simplu. Vom arunca o monedă de patru ori. Șansa să cadă de fiecare dată cap este $p = ^1/_2$. Rezultatul pentru patru aruncări poate fi scris folosind *C* pentru cap și *P* pentru pajură, aranjate în ordinea în care apar. De exemplu, s-ar putea să obținem de trei ori cap, în secvența *PCCC*. Există, de fapt, patru rezultate posibile care conțin de trei ori cap (celelalte sunt *CPCC*, *CCPC*, *CCCP*), așa că probabilitatea să cadă de trei ori cap este $^4/_{16} = 0{,}25$.

Pentru un număr mic de aruncări, probabilitățile sunt ușor de calculat și de aranjat într-un tabel și putem calcula, de asemenea, și cum sunt distribuite probabilitățile. Numărul șirurilor de combinații poate fi găsit din triunghiul lui Pascal (vezi p. 52):

număr de apariții cap	0	1	2	3	4
număr de combinații	1	4	6	4	1
probabilitate	0,0625	0.25	0,375	0,25	0.0625
$(=^1/_{16})$ $(=^4/_{16})$	$(=^6/_{16})$	$(=^4/_{16})$	$(=^1/_{16})$		

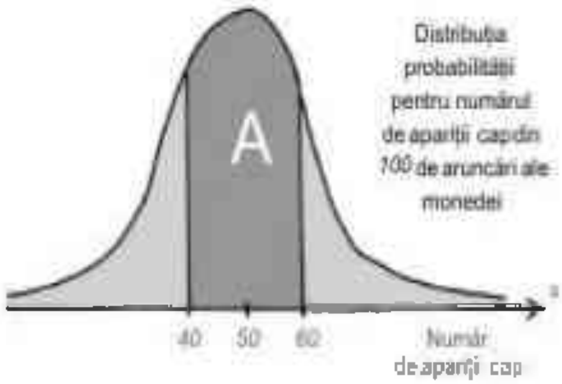
Aceasta este ceea ce se numește o distribuție binomială a probabilităților, care apare acolo unde sunt posibile două rezultate (cap sau pajură, în cazul nostru). Aceste probabilități pot fi reprezentate printr-o diagramă în care li se descriu atât înălțimile, cât și ariile.

Aruncarea de patru ori a unei monede este destul de restrictivă. Ce se întâmplă dacă aruncăm moneda de un număr mai mare, să zicem de 100 de ori? Distribuția binomială a probabilităților poate fi aplicată pentru $n = 100$, dar poate fi util să o aproximăm cu



o curbă normală în formă de clopot, cu media $\mu = 50$ (cași cum ne-am aștepta să cadă de 50 de ori cap când aruncăm moneda de 100 de ori) și variabilitatea (deviația standard) $\sigma = 5$. Aceasta este ceea ce de Moivre a descoperit în secolul al XVI-lea.

Pentru valori mari ale lui n, variabila x care măsoară numărul de reușite se potrivește din ce în ce mai bine cu curba normală. Cu cât este mai mare valoarea lui n, cu atât este mai bună aproximarea, iar aruncarea monedei de 100 de ori poate fi calificată drept mare. Acum să spunem că vrem să aflăm probabilitatea să cadă cap de un număr de ori plasat între 40 și 60. Aria A arată regiunea de care suntem interesați și ne dă probabilitatea să cadă cap între 40 și 60 de ori, scrisă ca prob($40 \le x \le 60$). Ca să aflăm valoarea numerică propriu-zisă trebuie să folosim tabele matematice precalculate și, odată ce facem asta, găsim că prob($40 \le x \le 60$) = 0,9545. Aceasta înseamnă că probabilitatea de a obține între 40 și 60 de apariții cap din 100 de aruncări ale monedei este 95,45%, ceea ce înseamnă că este foarte probabil.



Aria rămasă este 1 – 0,9545, adică doar 0,0455. Cum curba normală este simetrică față de mijlocul ei, jumătate ne va da probabilitatea de a obține mai mult de 60 de apariții cap din 100 de aruncări ale monedei. Aceasta este de doar 2,275% și reprezintă, într-adevăr, o șansă foarte mică. Când mergeți la Las Vegas, este un pariu la care mai bine renunțați.

Idee de bază
ubicua curbă în formă de clopot

36 Legătura dintre date

Care este legătura dintre două seturi de date? Statisticienii de acum un secol credeau că au aflat răspunsul. Corelația și regresia merg mână în mână, dar sunt diferite și fiecare are propria misiune de îndeplinit. Corelația măsoară cât de strânsă este legătura dintre două cantități, cum ar fi greutatea și înălțimea. Regresia poate fi folosită pentru a prognoza valorile unei proprietăți (greutatea, să zicem) cu ajutorul celeilalte (înălțimea, în acest caz).

CORELAȚIA LUI PEARSON

Termenul corelație a fost introdus de Francis Galton în anii 1880. Inițial, el a numit-o „co-relație”, un cuvânt mai potrivit pentru a-i explica înțelesul. Galton, un gentleman al științei din epoca victoriană, dorea să măsoare totul și a aplicat corelația la perechi de variabile: lungimea aripilor și a cozilor în cazul păsărilor, de exemplu. Coeficientul de corelație Pearson, numit după biograful și protejatul lui Galton, Karl Pearson, este măsurat pe o scală între minus unu și plus unu. Dacă valoarea lui numerică este mare, să zicem +0,9, se spune că există o corelație puternică între variabile. Coeficientul de corelație măsoară tendința datelor de a se așeza de-a lungul unei linii drepte. Dacă este aproape de zero, corelația este ca și inexistentă.

Vrem deseori să stabilim corelația dintre două variabile, pentru a vedea cât de puternică este legătura dintre ele. Să luăm exemplul vânzării de ochelari de soare și să vedem ce legătură există între aceasta și vânzarea de înghețată. San Francisco ar fi locul potrivit pentru un astfel de studiu și vom strânge date pentru fiecare lună în acest oraș. Dacă așezăm punctele pe un grafic unde coordonata *x* (orizontala) reprezintă vânzarea de înghețată și coordonata *y* (verticala) dă vânzarea de ochelari de soare, în fiecare lună vom avea un punct *(x,y)* reprezentând ambele date. De exemplu, punctul (3,4) ar putea însemna că, în luna mai, vânzările de ochelari de soare au fost de 30 000$, iar în aceeași lună s-a vândut în oraș înghețată de 40 000$. Putem marca pe diagramă punctele *(x,y)* asociate fiecărei luni, pentru un an întreg. Pentru acest exemplu, valoarea coeficientului de corelație Pearson ar fi în jur de 0,9, indicând o legătură puternică. Datele au tendința de a se așeza pe o linie dreaptă.

CRONOLOGIE

1806 d.Hr.
Adrien-Marie Legendre prelucrează datele prin metoda celor mai mici pătrate.

1809
Carl Friedrich Gauss folosește metoda celor mai mici pătrate în probleme de astronomie.

1885–1888
Galton introduce regresia și corelația.

Este pozitiv deoarece linia dreaptă are un gradient pozitiv – arată în direcția nord-est.

CAUZĂ ȘI CORELAȚIE

Găsirea unei corelații puternice între două variabile nu este suficientă pentru a susține că una o cauzează pe cealaltă. Între cele două variabile poate exista o relație de tipul cauză-efect, dar nu se poate afirma acest lucru doar pe baza dovezilor numerice. Când vine vorba despre subiectul cauză/corelație, se folosește, de obicei, cuvântul „asociere" și nu este înțelept să mergem mai departe de atât.

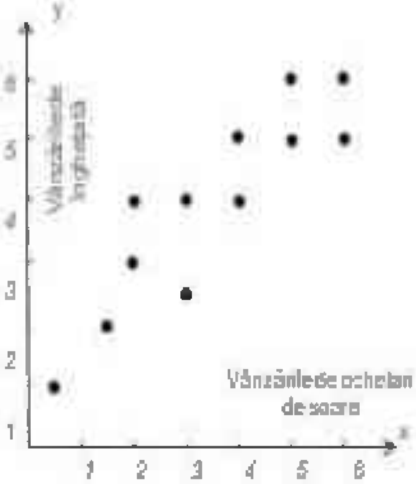


Diagrama de împrăștiere

În exemplul cu ochelarii de soare și înghețata, există o corelație puternică între vânzările celor două produse. Când crește vânzarea de ochelari de soare, vânzarea de înghețată are tendința să crească și ea. Ar fi ridicol să susținem că se vinde mai multă înghețată pentru că au crescut vânzările la ochelari de soare. Cum tot vorbim despre corelație, s-ar putea să intre în acțiune o variabilă intermediară, ascunsă. De exemplu, cheltuielile pe ochelari de soare și pe înghețată sunt legate una de alta ca rezultat al efectelor sezoniere (vreme caldă în lunile de vară, vreme rece în timpul iernii). Și mai există un pericol în folosirea corelațiilor. Poate exista o corelație puternică între variabile, însă fără ca între ele să existe vreo legătură logică sau științifică. Ar putea exista o corelație foarte puternică între numerele de casă și vârstele însumate ale locatarilor din fiecare casă, dar ar fi o greșeală să căutăm aici vreo semnificație.

CORELAȚIA LUI SPEARMAN

Corelația poate fi folosită în alte scopuri. Coeficientul de corelație poate fi adaptat pentru prelucrarea ordonată a datelor – date pe care vrem să le cunoaștem primele, în al doilea rând, în al treilea ș.a.m.d, dar nu neapărat alte valori numerice.

Câteodată avem doar ranguri pe post de date. Să luăm cazul lui Albert și Zac, doi riguroși arbitri la un concurs de patinaj artistic, care trebuie să evalueze patinatorii după meritul artistic. Evaluarea va fi una subiectivă. Albert și Zac au fost amândoi campioni olimpici și sunt chemați să arbitreze grupul final, în care au ajuns doar cinci concurente: Ann, Beth, Charlotte, Dorothy și Ellie. Dacă Albert și Zac le-ar pune pe aceleași poziții în clasament, ar fi bine, dar, în realitate, lucrurile nu stau așa. Pe de

1896

Pearson publică propriile contribuții la corelație și regresie.

1904

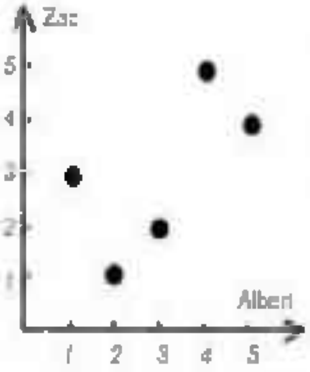
Spearman folosește corelația rangurilor ca instrument pentru studii psihologice.

$$1 - \frac{6 \times sum}{n \times (n^2-1)}$$

Formula lui Spearman

altă parte, nu ne așteptăm ca Albert să ordoneze concurentele într-un fel, iar Zac să le pună exact în ordine inversă. În realitate, clasamentele celor doi ar trebui să se afle undeva între aceste două extreme. Albert a alcătuit un clasament de la 1 la 5 cu Ann pe primul loc, urmată de Ellie, Beth, Charlotte și, pe ultimul loc, Dorothy. Zac a considerat-o pe Ellie cea mai bună, urmată de Beth, Ann, Dorothy și Charlotte. Aceste clasamente pot fi transcrise în următorul tabel:

Patinatoare	clasamentul lui Albert	clasamentul lui Zac	diferență între clasamente, d	d^2
Ann	1	3	−2	4
Ellie	2	1	1	1
Beth	3	2	1	1
Charlotte	4	5	−1	1
Dorothy	5	4	1	1
$n = 5$			suma	8



Măsurarea concordanței dintre cei doi arbitri

Cum putem măsura gradul de concordanță dintre cei doi arbitri? Coeficientul de corelație al lui Spearman este instrumentul folosit de matematicieni ca să facă acest lucru pentru datele ordonate. Valoarea lui aici este 0,6, ceea ce indică un grad limitat de concordanță între Albert și Zac. Dacă tratăm perechile de ranguri ca puncte pe care le marcăm pe un grafic, obținem o reprezentare vizuală a acordului sau a dezacordului dintre cei doi arbitri.

Formula pentru acest coeficient de corelație a fost pusă la punct în 1904 de Charles Spearman, care, ca și Pearson, a fost influențat de Francis Galton.

DREAPTA DE REGRESIE

Ești mai scund sau mai înalt decât părinții tăi sau te plasezi undeva între înălțimile lor? Dacă toți am fi mai înalți decât părinții noștri, iar asta s-ar întâmpla la fiecare generație, atunci, într-o bună zi, populația ar fi formată din oameni de trei metri înălțime și chiar mai mult, ceea ce cu siguranță nu se poate întâmpla. Dacă toți am fi mai scunzi decât părinții noștri, populația ar scădea treptat în înălțime, iar aceasta este la fel de puțin probabil. Adevărul se află în altă parte.

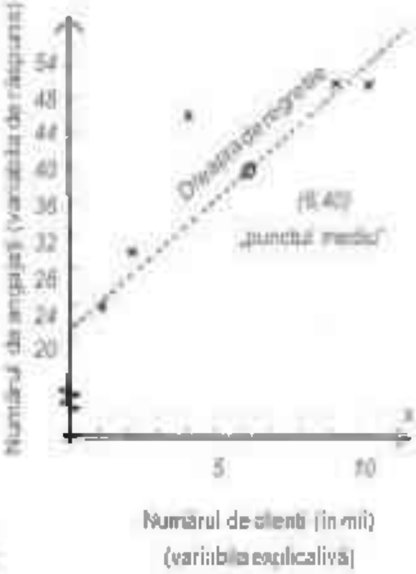
În anul 1880, Francis Galton a făcut o serie de teste prin care a comparat înălțimile adulților tineri cu înălțimile părinților lor. Pentru fiecare variabilă x ce măsura înălțimea părinților (ce combina, de fapt, înălțimea mamei și înălțimea tatălui într-o înălțime medie a părinților), el a notat înălțimea copiilor lor. Vorbim despre un pasionat de știința practică, așa că au apărut imediat creioanele și foile de hârtie cu pătrățele, pe care a marcat datele. Pentru 205 cupluri și 928 de copii, el a găsit pentru ambele seturi

o înălțime medie de 173,4 cm, pe care a numit-o „mediocritate", dar termenul folosit acum este „medie". El a descoperit că progeniturile cuplurilor înalte erau, în general, mai înalte decât această medie, dar nu la fel de înalte ca părinții lor, în timp ce copiii scunzi erau mai înalți decât media părinților lor, dar mai mici de statură decât media. Cu alte cuvinte, înălțimile copiilor regresau spre medie.

Regresia este o tehnică puternică și cu aplicații pe scară largă. Să presupunem că, pentru un studiu, echipa de cercetare operațională a unui mare lanț comercial alege cinci dintre magazinele acestuia, de la unele mici (cu 1 000 de clienți pe lună) până la unele foarte mari (cu 10 000 de clienți pe lună). Echipa de cercetare notează numărul de angajați din fiecare magazin. Ei planifică să folosească regresia pentru a estima de câți angajați ar fi nevoie în celelalte magazine.

număr de clienți (mii)	1	4	6	9	10
număr de angajați	24	30	46	47	53

Să marcăm punctele pe un grafic, unde asociem coordonata x cu numărul de clienți (numim această variabilă explicativă), în timp ce numărul de angajați corespunde coordonatei y (numită variabila de răspuns). Numărul de clienți este cel care explică numărul de angajați și nu invers. Numărul mediu de clienți în magazinele lanțului corespunde lui 6 (adică 6 000 de clienți), iar numărul mediu de angajați este 40. Dreapta de regresie trece întotdeauna prin „punctul mediu", aici (6, 40). Există formule pentru calcularea dreptei de regresie, dreapta care se potrivește cel mai bine cu datele (cunoscută și ca dreapta celor mai mici pătrate). În cazul nostru, linia este $\hat{y} = 20{,}8 + 3{,}2x$, așadar panta este 3,2 și este pozitivă (urcând de la stânga spre dreapta). Linia intersectează axa verticală y în punctul 20,8. Termenul $\hat{y}$ este estimarea valorii y obținută din dreaptă. Așadar, dacă vrem să știm câți angajați ar trebui să lucreze într-un magazin care primește 5 000 de clienți pe lună, înlocuim valoarea $x = 5$ în ecuația de regresie și obținem estimarea $\hat{y} = 37$ angajați, arătând că regresia are o aplicație extrem de practică.



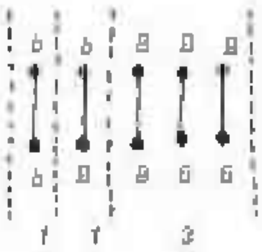
Idee de bază
interacțiunea datelor

37 Genetică

Genetica este o ramură a biologiei, așadar de ce apare într-o carte de matematică? Răspunsul este că aceste două subiecte se impulsionează și se îmbogățesc unul pe celălalt. Problemele de genetică necesită matematică, dar genetica a sugerat, la rândul ei, apariția de noi ramuri ale algebrei. Gregor Mendel este personajul central al geneticii, studiul moștenirii umane. Caracteristici ereditare, cum ar fi culoarea ochilor, a părului, incapacitatea distingerii culorilor, preferința pentru mâna dreaptă/stângă sau grupa sangvină, toate acestea sunt determinate de factorii (alelele) unei gene. Mendel a spus că acești factori se transmit independent la generația următoare.

Așadar, cum ar putea factorul culoarea ochilor să se transmită la generația următoare? În modelul de bază există doi factori, *b* și *B*:

b este factorul ochi albaștri
B este factorul ochi căprui



Populația reprezentând proporțiile 1:1:3 ale genotipurilor bb, bB și BB

La indivizi, factorii apar în perechi, dând genotipurile posibile *bb*, *bB* și *BB* (pentru că *bB* este același cu *Bb*). O persoană are unul dintre aceste trei genotipuri, care îi determină culoarea ochilor. De exemplu, o populație ar putea fi formată dintr-o cincime din oameni cu genotipul *bb*, o altă cincime cu genotipul *bB*, iar cele trei cincimi rămase cu genotipul *BB*. În termeni de procente, aceste genotipuri ar reprezenta 20%, 20% și 60% din populație. Ele pot fi reprezentate pe o diagramă arătând proporțiile genotipurilor.

Factorul *B*, care determină ochii căprui, este factorul dominant, iar *b*, factorul care determină culoarea albastră, este factorul recesiv. O persoană cu un genotip cu gene pure *BB* va avea ochi căprui, dar la fel va avea o persoană cu factori amestecați, altfel spus, cei cu genotip hibrid *bB*, deoarece *B* este dominant. O persoană cu genotip cu gene pure *bb* va fi singurul genotip care prezintă ochi albaștri.

CRONOLOGIE

1718 d.Hr.
Abraham de Moivre publică *Doctrina șanselor*

1865
Mendel propune existența genelor și legile transmiterii ereditare

1908
Hardy și Weinberg arată de ce genele dominante nu suprimă genele recesive.

O întrebare arzătoare din domeniul biologiei a apărut la începutul secolului al XX-lea. Se poate întâmpla ca ochii căprui să devină din ce în ce mai întâlniți, iar ochii albaștri să dispară? Sunt ochii albaștri pe cale de dispariție? Răspunsul a fost un „Nu" hotărât.

LEGEA HARDY-WEINBERG

Acest lucru a fost explicat de legea Hardy–Weinberg, o aplicație la genetică a matematicii elementare. Ea explică în ce fel, în teoria mendeliană a eredității, o genă dominantă nu poate acoperi totul și o genă recesivă nu dispare.

G.H. Hardy a fost un matematician englez care găsea un motiv de mândrie în lipsa de aplicație practică a matematicii. A fost un mare cercetător în domeniul matematicii pure, dar este cunoscut mai degrabă pentru singura lui contribuție la genetică, ce a prins viață ca o problemă de matematică notată pe dosul unui plic, după un meci de cricket. Wilhelm Weinberg venea dintr-un cadru cu totul diferit. Medic practician în Germania, a fost genetician toată viața. El a descoperit legea în același timp cu Hardy, în jurul anului 1908.

Legea se referă la o populație numeroasă, în care perechile se formează la întâmplare. Nu există preferințe în alegerea perechii, astfel încât, de exemplu, oamenii cu ochi albaștri nu preferă parteneri cu ochi albaștri. După împerechere, copilul primește câte un factor de la fiecare părinte. De exemplu, un genotip hibrid *bB* care se împerechează cu un hibrid *bB* poate da naștere oricărui genotip *bb*, *bB*, *BB*, dar un *bb* care se împerechează cu un *BB* poate produce doar un hibrid *bB*. Care este probabilitatea transmiterii unui factor *b*? Dacă numărăm factorii *b*, există doi pentru fiecare genotip *bb* și un factor *b* pentru fiecare genotip *bB*, ceea ce dă, ca proporție, un total de trei factori *b* din 10 (în exemplul nostru de populație cu proporții 1:1:3 ale celor trei genotipuri). Probabilitatea de transmitere a unui factor *b* în genotipul unui copil este, așadar, $^3/_{10}$ sau 0,3. Probabilitatea transmiterii unui factor *B* este $^7/_{10}$ sau 0,7. Probabilitatea ca genotipul *bb* să fie inclus în generația următoare, de exemplu, este, așadar, 0,3 × 0,3 = 0,09. Setul complet de probabilități este rezumat în tabel.

b	b		B	
b	bb	0,3 × 0,3 = 0,09	bB	0,3 × 0,7 = 0,21
B	Bb	0,3 × 0,7 = 0,21	BB	0,7 × 0,7 = 0,49

1918

Fisher reconciliază teoria lui Darwin cu teoria mendeliană a eredității.

1953

Este descoperită structura de dublă elice a ADN-ului.

Genotipurile hibride *bB* și *Bb* sunt identice, așadar probabilitatea apariției acestora este 0,21 + 0,21 = 0,42. Exprimate în procente, proporțiile genotipurilor *bb*, *bB* și *BB* în noua generație sunt 9%, 42% și 49%. Deoarece *B* este factorul dominant, 42% + 49% = 91% din prima generație va avea ochi căprui. Doar un individ cu genotipul *bb* va prezenta caracteristica observabilă a factorului *b*, așadar numai 9% din populație va avea ochi albaștri.

Distribuția inițială a genotipurilor era 20%, 20% și 60%, iar în noua generație distribuția genotipurilor este 9%, 42% și 49%. Ce se întâmplă în continuare? Să vedem ce se întâmplă dacă din această generație se obține una nouă, tot prin împerechere aleatorie. Proporția factorilor *b* este 0,09 + ½ × 0,42 = 0,3, proporția de factori *B* este ½ × 0,42 + 0,49 = 0,7. Acestea sunt identice cu precedentele probabilități de transmitere a factorilor *b* și *B*. Distribuția genotipurilor *bb*, *bB* și *BB* în generația următoare este, așadar, aceeași ca în generația precedentă. În particular, genotipul *bb* care dă ochi albaștri nu moare, dar rămâne stabil la 9% din populație. Proporțiile succesive ale genotipurilor într-o secvență de împerechere aleatorie sunt așadar:

20%, 20%, 60% → 9%, 42%, 49% → ... → 9%, 42%, 49%

Rezultatul este în concordanță cu legea Hardy–Weinberg: după o generație, proporțiile genotipurilor rămân constante de la o generație la alta, iar probabilitățile de transmitere sunt constante și ele.

ARGUMENTUL LUI HARDY

Ca să vedem dacă legea Hardy–Weinberg funcționează pentru orice populație inițială, nu doar pentru cea cu distribuția 20%, 20% și 60% pe care am selectat-o pentru exemplul nostru, cel mai bun lucru pe care îl putem face este să ne referim la argumentația lui Hardy, pe care i-a scris-o editorului revistei americane *Science*, în 1908.

Hardy începe cu distribuția inițială a genotipurilor *bb*, *bB* și *BB* ca p, $2r$ și q, precum și cu probabilitățile de transmitere $p + r$ și $r + q$. În exemplul nostru numeric (cu 20%, 20%, 60%), $p = 0,2$, $2r = 0,2$ și $q = 0,6$. Probabilitățile de transmitere ale factorilor *b* și *B* sunt $p + r = 0,2 + 0,1 = 0,3$ și $r + q = 0,1 + 0,6 = 0,7$. Dar dacă ar fi o distribuție inițială diferită a genotipurilor *bb*, *bB* și *BB*, am începe, să spunem, cu 10%, 60% și 30%? Cum ar opera legea Hardy–Weinberg în acest caz? Aici am avea $p = 0,1$, $2r = 0,6$ și $q = 0,3$, iar probabilitățile de transmitere ale factorilor *b* și *B* sunt respectiv $p + r = 0,4$ și $r + q = 0,6$. Așadar, distribuția următoarei generații de genotipuri este 16%, 48% și 36%. Proporțiile succesive ale genotipurilor *bb*, *bB* și *BB* după împerecheri aleatorii sunt:

10%, 60%, 30% → 16%, 48%, 36% → ... → 16%, 48%, 36%

Proporțiile se stabilizează după numai o generație, la fel ca înainte, iar probabilitățile de transmitere 0,4 și 0,6 rămân constante.

Așadar, legea Hardy–Weinberg spune că proporțiile genotipurilor *bb*, *bB* și *BB* vor rămâne constante din generație în generație, oricare ar fi distribuția inițială a factorilor în populația respectivă. Gena dominantă *B* nu ocupă tot terenul, iar proporțiile genotipurilor sunt intrinsec stabile.

Hardy a subliniat că modelul lui era doar aproximativ. Simplitatea și eleganța lui depindeau de numeroase presupuneri care nu ar fi fost îndeplinite în viața reală. Modelul nu ține cont de probabilitatea mutației unor gene sau de schimbări în gene, iar consecința faptului că proporțiile de transmitere rămân constante este că nu are nimic de spus despre evoluție. În viața reală există „derivă genetică", iar probabilitățile de transmitere a factorilor nu rămân constante. Aceasta provoacă variații în proporțiile globale și vor evolua noi specii.

Legea Hardy–Weinberg a adus împreună teoria lui Mendel – „teoria cuantică" a geneticii – și darwinismul și selecția naturală, într-o modalitate intrinsecă. A fost nevoie de geniul lui R.A. Fisher pentru a reconcilia teoria mendeliană a eredității cu teoria continuă în care caracteristicile evoluează.

Ce a lipsit din știința geneticii până în anii 1950 a fost o înțelegere fizică a materialului genetic însuși. Apoi s-a înregistrat un progres dramatic, la care au contribuit Francis Crick, James Watson, Maurice Wilkins și Rosalind Franklin. Mediul a fost acidul dezoxiribonucleic, sau ADN. Cu ajutorul matematicii a fost modelată celebra dublă elice (sau o pereche de spirale înfășurate în jurul unui cilindru). Genele sunt localizate pe segmentele acestei duble elici.

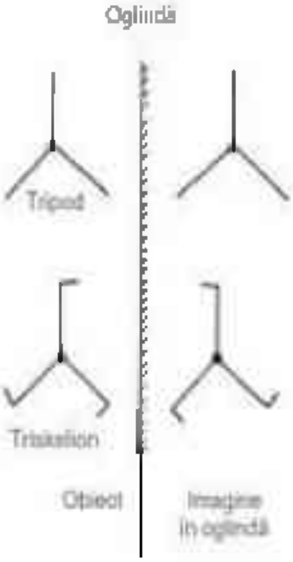
Matematica este indispensabilă pentru studiul geneticii. De la geometria elementară a spiralelor de ADN și potențial sofisticata lege Hardy–Weinberg, au fost dezvoltate modele matematice care tratează numeroase caracteristici (nu doar culoarea ochilor) și care includ diferențierea bărbat – femeie și împerecherea nealeatorie. Știința geneticii i-a întors matematicii serviciile, sugerând noi ramuri de algebră abstractă, interesante prin proprietățile lor matematice uimitoare.

Idee de bază
incertitudine în bazinul genetic

38 Grupuri

Évariste Galois a murit într-un duel, la vârsta de 20 de ani, dar a lăsat în urmă suficiente idei ca să le dea de lucru matematicienilor secole de-a rândul. Printre acestea a fost teoria grupurilor, construcţii matematice care pot fi folosite pentru a cuantifica simetria. Pe lângă atractivitatea ei artistică, simetria este ingredientul esenţial pentru oamenii de ştiinţă care visează la o viitoare teorie a totului. Teoria grupurilor este cleiul care ţine „totul" laolaltă.

Simetria este peste tot în jurul nostru. O găsim la vasele greceşti, la fulgii de zăpadă, la majoritatea clădirilor şi la unele litere din alfabet. Există câteva tipuri de simetrie: cele mai importante sunt simetria în oglindă şi simetria rotaţională. Noi ne vom apleca doar asupra simetriei bidimensionale – toate obiectele noastre de studiu se află pe suprafaţa plană a acestei pagini.



SIMETRIA ÎN OGLINDĂ

Putem aşeza o oglindă astfel încât un obiect să arate la fel şi în oglindă, şi în faţa oglinzii? Cuvântul MUM are simetrie în oglindă, dar cuvântul HAM nu; MUM în faţa oglinzii arată la fel ca MUM în oglindă, în timp ce HAM devine MAH. Un tripod are simetrie în oglindă, însă un triskelion (tripod cu picioare) nu. Triskelionul ca obiect în faţa oglinzii este orientat spre dreapta, dar imaginea lui oglindită în ceea ce se numeşte planul imaginii este orientată spre stânga.

SIMETRIE ROTAŢIONALĂ

Ne putem întreba, de asemenea, dacă există o axă perpendiculară pe pagină astfel încât obiectul să fie rotit cu un unghi şi să fie readus în poziţia originală. Tripodul şi triskelionul au amândouă simetrie rotaţională. Triskelionul, însemnând „trei picioare", este o formă interesantă. Versiunea orientată spre dreapta este o figură care apare ca simbol al Insulei Man şi, totodată, pe steagul Siciliei.

CRONOLOGIE

1832 d.Hr.	1854	1872
Galois propune ideea grupurilor de permutări.	Cayley încearcă să generalizeze conceptul de grup.	Felix Klein începe un program pentru clasificarea geometriei cu ajutorul grupurilor.

Dacă o rotim cu 120° sau cu 240°, figura rotită va coincide cu ea însăși; dacă închizi ochii înainte să o rotești, vei vedea același triskelion când îi deschizi după rotație.

Lucrul curios despre figura cu trei picioare este că nici o rotație care o menține în plan, oricât de amplă, nu va putea să transforme vreodată un triskelion orientat spre dreapta într-unul orientat spre stânga. Obiectele pentru care imaginea în oglindă este diferită de obiectul din fața oglinzii se numesc chirale – par similare, dar nu sunt la fel. Structura moleculară a unor compuși chimici poate exista în trei dimensiuni și în versiune de dreapta și de stânga, fiind exemple de obiecte chirale. Acesta este cazul compusului chimic limonen, care într-o formă are gust de lămâie, iar în cealaltă de portocale. Medicamentul thalidomidă într-o formă tratează eficient grețurile matinale asociate sarcinii, dar în cealaltă formă are consecințe tragice.

Triskelionul Insulei Man

MĂSURAREA SIMETRIEI

În cazul triskelionului nostru, operațiunile de simetrie elementare sunt rotațiile (în sensul acelor de ceasornic) *R*, cu 120°, și *S*, cu 240°. Transformarea *I* este cea care rotește triunghiul cu 360° sau, altfel spus, nu face absolut nimic. Putem construi un tabel pe baza combinațiilor acestor rotații, în același fel în care am alcătui un tabel de multiplicare.

*	I	R	S
I	I	R	S
R	R	S	I
S	S	I	R

Tabel Cayley pentru grupul de simetrie al triskelionului

Acest tabel este ca un tabel obișnuit de multiplicare cu numere, doar că „multiplicăm" simboluri. Potrivit convenției larg utilizate, înmulțirea $R \cdot S$ înseamnă că mai întâi rotim triskelionul cu 240° în sensul acelor de ceasornic, cu *S*, și apoi cu 120° cu *R*, rezultatul fiind o rotație de 360°, ca și cum nu ai fi făcut nimic. Operațiunea se poate scrie $R \cdot S = I$, rezultat pe care îl găsim la intersecția penultimei coloane cu ultimul rând din tabel.

Grupul de simetrie al triskelionului este format din *I*, *R* și *S*, iar tabelul de multiplicare ne arată cum le combinăm. Deoarece grupul are trei elemente, dimensiunea (sau „ordinul") lui este trei. Tabelul se mai numește tabel Cayley (numit după matematicianul Arthur Cayley).

1891

Evgraf Fedorov și Arthur Schönflies clasifică, independent unul de altul, cele 230 de grupuri cristalografice.

1983

Clasificarea grupurilor finite simple este finalizată și este demonstrată și teorema.

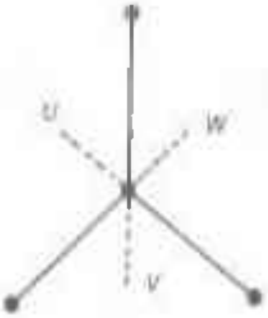
•	I	R	S	U	V	W
I	I	R	S	U	V	W
R	R	S	I	V	W	U
S	S	I	R	W	U	V
U	U	W	V	I	S	R
V	V	U	W	R	I	S
W	W	V	U	S	R	I

Tabel Cayley pentru grupul de simetrie al tripodului

Ca și triskelionul, tripodul fără picioare are simetrie rotațională. Dar el are și simetrie în oglindă, așadar are un grup de simetrie mai mare. Vom numi *U*, *V* și *W* reflexiile în cele trei axe ale oglinzii.

Grupul de simetrie mai mare al tripodului, care este de ordinul șase, este compus din șase transformări, *I*, *R*, *S*, *U*, *V* și *W*, iar tabelul de multiplicare este cel alăturat.

O transformare interesantă este obținută prin combinarea a două reflexii în axe diferite, cum ar fi $U \circ W$ (unde reflexia *W* este aplicată prima și este urmată de reflexia *U*). Aceasta este, de fapt, o rotație a tripodului cu 120°, în simboluri $U \circ W = R$. Combinarea reflexiilor în celălalt mod, $W \circ U = S$, dă o rotație de 240°. În particular, $U \circ W \neq W \circ U$. Aceasta este o diferență importantă între un tabel de multiplicare pentru un grup și un tabel de multiplicare obișnuit, cu numere.



Reflexiile unui tripod

Un grup în care nu contează ordinea combinării elementelor se numește grup abelian, după matematicianul norvegian Niels Abel. Grupul de simetrie al tripodului este cel mai mic grup care nu este abelian.

GRUPURI ABSTRACTE

Tendința în algebra secolului XX a fost spre algebra abstractă, în care un grup este definit prin niște reguli de bază numite axiome. Din acest punct de vedere, grupul de simetrie al triunghiului devine doar un exemplu de sistem abstract. Există în algebră sisteme care sunt mai elementare decât un grup și necesită mai puține axiome; alte sisteme sunt mai complexe și au nevoie de mai multe axiome. Cu toate acestea, conceptul de grup este foarte potrivit și este cel mai important dintre toate sistemele algebrice. Este remarcabil că din atât de puține axiome rezultă o cantitate atât de mare de cunoștințe. Avantajul metodei abstracte este că teoremele generale pot fi deduse pentru toate grupurile și aplicate, după cum este nevoie, unor grupuri anume.

O caracteristică a teoriei grupurilor este că pot exista grupuri mai mici în interiorul unora mai mari. Grupul de simetrie al triskelionului de ordin trei este un subgrup al grupului de simetrie al tripodului de ordin șase. J.L. Lagrange a demonstrat un fapt elementar despre grupuri. Teorema lui Lagrange afirmă că ordinul unui subgrup trebuie întotdeauna să dividă exact ordinul grupului. Astfel, știm automat că grupul de simetrie al tripodului nu are subgrupuri de ordin patru sau cinci.

CLASIFICAREA GRUPURILOR

A existat un program amplu de clasificare a tuturor grupurilor finite posibile. Nu este nevoie să le înșirăm pe toate, deoarece unele grupuri sunt construite din cele de bază, și grupurile de bază sunt cele de care este nevoie. Principiul de clasificare este foarte

asemănător cu cel din chimie, unde interesul se concentrează pe elementele chimice de bază, și nu pe compușii care pot fi construiți din ele. Grupul de simetrie al tripodului cu șase elemente este un „compus" construit din grupul de rotații (de ordin trei) și grupul de reflexii (de ordin doi).

Aproape toate grupurile de bază pot fi clasificate în clase cunoscute. Clasificarea completă, numită și „enorma teoremă", a fost anunțată de Daniel Gorenstein în 1983 și s-a ajuns la ea prin acumularea a 30 de ani de cercetări și de lucrări publicate de matematicieni. Este un atlas al tuturor grupurilor cunoscute. Grupurile de bază intră într-unul dintre cele patru tipuri principale și, totuși, au fost găsite 26 de grupuri care nu intră în nici o categorie. Acestea sunt cunoscute drept grupuri sporadice.

Axiome pentru un grup

O colecție de elemente G cu „multiplicarea" * se numește grup dacă:

1. Există un element 1 în G astfel încât 1 * a = a * 1 = a pentru toate elementele a din grupul G (elementul special 1 se numește element de identitate).

2. Pentru fiecare element a din G există un element $\bar{a}$ în G cu $\bar{a} * a = a * \bar{a} = 1$ (elementul $\bar{a}$ se numește elementul invers al lui a).

3. Pentru toate elementele a, b și c din G este adevărat că a * (b * c) = (a * b) * c (legea asociativă).

Grupurile sporadice sunt nonconformiste și, de obicei, sunt de ordin mare. Cinci dintre cele mai mici îi erau cunoscute lui Émile Mathieu în anii 1860, dar cea mai mare parte a cercetărilor moderne s-a desfășurat între 1965 și 1975. Cel mai mic grup sporadic este de ordinul $7920 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11$, dar la extrema cealaltă sunt „monstrulețul" și chiar un „monstru" în toată regula, care are ordinul $2^{46} \times 3^{20} \times 5^9 \times 7^6 \times 11^2 \times 13^3 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 41 \times 47 \times 59 \times 71$, care, în limbaj zecimal, este aproximativ 8×10^{53} sau, dacă doriți, cifra 8 urmată de 53 de zerouri – un număr într-adevăr foarte mare. Se poate arăta că 20 dintre cele 26 de grupuri sporadice sunt reprezentate ca subgrupuri în interiorul „monstrului" – cele șase grupuri care sfidează orice sistem de clasificare sunt cunoscute drept „cei șase paria".

Chiar dacă în matematică sunt foarte apreciate demonstrațiile istețe și scurte, demonstrația clasificării grupurilor finite se întinde pe aproximativ 10 000 de pagini de simboluri riguros argumentate. Progresul matematic nu se datorează întotdeauna muncii unui singur geniu uimitor.

Idee de bază
măsurând simetria

39 Matrici

Aceasta este povestea „algebrei extraordinare" – o revoluție în matematică petrecută la jumătatea secolului al XIX-lea. Matematicienii se jucau de secole cu blocuri de numere, dar ideea de a trata blocurile ca un singur număr a apărut acum 150 de ani, când un mic grup de matematicieni i-au recunoscut potențialul.

Algebra obișnuită este algebra tradițională, în care simboluri ca *a*, *b*, *c*, *x* și *y* reprezintă simple numere. Multora li se pare greu de înțeles, dar pentru matematicieni a fost un mare pas înainte. Prin comparație, „algebra extraordinară" a provocat un val seismic. Pentru aplicațiile sale sofisticate, acest progres de la o algebră unidimensională la o algebră multidimensională avea să se dovedească incredibil de puternic.

NUMERE MULTIDIMENSIONATE

În algebra obișnuită, *a* poate reprezenta un număr, cum ar fi 7, și am scrie *a* = 7, dar, în teoria matricilor, o matrice *A* ar fi „un număr multidimensionat", de exemplu blocul

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Această matrice are trei linii și patru coloane (este o matrice „3 pe 4"), dar în principiu putem avea matrici cu orice număr de linii și coloane – chiar și o gigantică „100 pe 200", o matrice cu 100 de linii și 200 de coloane. Un avantaj critic al algebrei matricilor este că ne putem gândi la etalări vaste de numere, cum ar fi seturile de date din statistică, ca la o singură entitate. Mai mult, putem opera simplu și eficient cu aceste blocuri de numere. Dacă vrem să adunăm sau să înmulțim toate numerele din două seturi de date, fiecare constând din 1 000 de numere, nu trebuie să facem 1 000 de calcule – trebuie să facem doar unul (adunarea sau înmulțirea a două matrici).

CRONOLOGIE

200 î.Hr. Matematicienii chinezi folosesc tablouri de numere.

1850 d.Hr. J.J. Sylvester introduce termenul „matrice".

1858 Cayley publică Studiu asupra teoriei matricilor.

UN EXEMPLU PRACTIC

Să presupunem că matricea *A* reprezintă producția companiei AJAX pe o săptămână. Compania AJAX are trei fabrici localizate în diferite părți ale țării, iar producția lor este măsurată în unități (să spunem 1 000 de bucăți) din cele patru produse pe care le fabrică. În exemplul nostru, cantitățile sunt contabilizate în matricea *A*, prezentată anterior:

	produs 1	produs 2	produs 3	produs 4
fabrica 1	7	5	0	1
fabrica 2	0	4	3	7
fabrica 3	3	2	0	2

În săptămâna următoare, programul de producție ar putea fi diferit, dar poate fi și el scris într-o altă matrice, *B*. De exemplu, *B* ar putea fi

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Care este producția totală pe două săptămâni? Teoria matricilor spune că este matricea $A + B$, unde numerele corespondente sunt însumate două câte două.

$$A + B = \begin{pmatrix} 7+9 & 5+4 & 0+1 & 1+0 \\ 0+0 & 4+5 & 3+1 & 7+8 \\ 3+4 & 2+1 & 0+1 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & 15 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Destul de ușor. Din păcate, înmulțirea matricilor este mai puțin clară. Revenind la compania AJAX, să presupunem că profitul pe unitate pentru cele patru produse este 3, 9, 8, 2. Sigur că putem calcula profitul total pentru Fabrica 1, cu producțiile 7, 5, 0, 1 din cele patru produse. Se face operațiunea $7 \times 3 + 5 \times 9 + 0 \times 8 + 1 \times 2 = 68$.

Dar în loc să ne ocupăm de o singură fabrică, putem să calculăm la fel de ușor profitul total *T* pentru *toate* fabricile:

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\times3+5\times9+0\times8+1\times2 \\ 0\times3+4\times9+3\times8+7\times2 \\ 3\times3+2\times9+0\times8+2\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 74 \\ 31 \end{pmatrix}$$

1878

Georg Frobenius demonstrează unele rezultate-cheie ale algebrei matricilor.

1925

Heisenberg folosește mecanica matricială în teoria cuantică.

Dacă priviți cu atenție, veți observa cum se face înmulțirea liniei cu coloana, o trăsătură esențială a înmulțirii matricilor. Dacă pe lângă profituri ni se dau și volumele 7, 4, 1, 5 din fiecare unitate de produse, putem calcula profiturile și necesitățile de spațiu de depozitare pentru cele trei fabrici dintr-o singură multiplicare de matrici:

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 4 \\ 8 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & 74 \\ 74 & 54 \\ 31 & 39 \end{pmatrix}$$

Stocul total este furnizat de coloana a doua a matricii rezultate, adică 74, 54 și 39. Teoria matricilor este foarte puternică. Imaginați-vă situația unei companii cu sute de fabrici, mii de produse și diferite profituri per unitate și nevoi de depozitare în diferite săptămâni. Cu algebra matricială, calculele – și înțelegerea noastră – sunt practic imediate, fără să ne facem griji în privința detaliilor care sunt luate automat în considerare.

ALGEBRA MATRICILOR VS ALGEBRA OBIȘNUITĂ

Se pot face multe comparații între algebra matricială și algebra obișnuită. Cea mai remarcabilă diferență apare la înmulțirea matricilor. Dacă înmulțim matricea *A* cu matricea *B* și apoi încercăm și varianta inversă:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times7+5\times4 & 3\times6+5\times8 \\ 2\times7+1\times4 & 2\times6+1\times8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 58 \\ 18 & 20 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\times3+6\times2 & 7\times5+6\times1 \\ 4\times3+8\times2 & 4\times5+8\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 41 \\ 28 & 28 \end{pmatrix}$$

Așadar, în algebra matricilor este posibil ca $A \times B$ și $B \times A$ să fie diferite, o situație care nu apare în algebra obișnuită, unde ordinea în care sunt înmulțite două numere nu influențează rezultatul.

O altă diferență apare când vine vorba despre inversări. În algebra obișnuită, inversele sunt ușor de calculat. Dacă $a = 7$, inversul lui este $\frac{1}{7}$ deoarece are proprietatea ca $\frac{1}{7} \times 7 = 1$. Acest invers este reprezentat uneori ca $a^{-1} = \frac{1}{7}$ și avem $a^{-1} \times a = 1$.

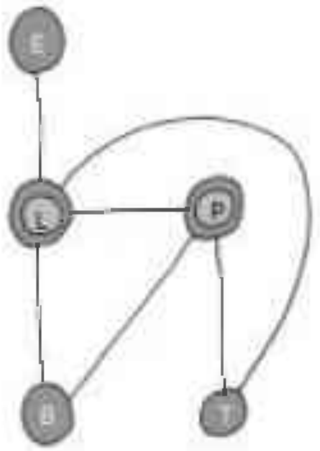
Un exemplu din teoria matricilor este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ și putem verifica rapid că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

deoarece $A^{-1} \times A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

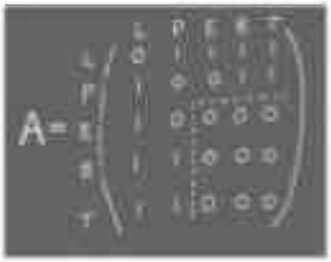
unde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se numește matrice identitate și este omologul matricial al lui 1 din algebra obișnuită. În algebra obișnuită, doar 0 nu are invers, dar în algebra matricială există numeroase matrici care nu au inverse.

PLANURI DE CĂLĂTORIE

Un alt exemplu de folosire a matricilor este în analiza programului de zboruri pentru companiile aeriene. Aceasta implică atât mari centre aeriene, cât și aeroporturi mai mici. În practică, poate fi vorba despre sute de destinații – aici vom analiza un exemplu mai mic: centrele Londra (L) și Paris (P) și aeroporturile mai mici Edinburgh (E), Bordeaux (B) și Toulouse (T) și rețeaua care arată posibilele zboruri directe. Când se folosește computerul pentru analiza unor astfel de rețele, ele sunt mai întâi codificate cu ajutorul matricilor. Dacă există un zbor direct între aeroporturi, se marchează un 1 la intersecția liniei și coloanei ce corespund acestor aeroporturi (cum ar fi de la Londra la Edinburgh). Matricea de „conectivitate" care descrie rețeaua de mai sus este A.



Submatricea din colțul dreapta jos (marcată cu linii punctate) arată că nu există zboruri directe între cele trei aeroporturi mai mici. Matricea obținută prin înmulțirea acestei matrici cu ea însăși, $A \times A = A^2$, poate fi interpretată ca furnizând numărul de călătorii posibile între două aeroporturi cu exact o escală. De exemplu, sunt posibile trei călătorii dus-întors la Paris via alte orașe, dar nici o călătorie de la Londra la Edinburgh care să presupună escale. Numărul de rute care sunt directe sau implică o escală sunt elementele matricii $A + A^2$. Acesta este un alt exemplu al capacității matricilor de a capta esența unei mari cantități de date sub umbrela unui singur calcul.



Când un mic grup de matematicieni a creat teoria matricilor, în anii 1850, a făcut-o ca să rezolve probleme de matematică pură. Dintr-o perspectivă practică, teoria matricilor a fost multă vreme „o soluție în căutarea unei probleme". Așa cum se întâmplă deseori, au apărut „probleme" care aveau nevoie de teoria abia născută. O primă aplicație a apărut în anii 1920, când Werner Heisenberg a cercetat „mecanica matricială", ca parte a teoriei cuantice. Un alt pionier a fost Olga Taussky-Todd, care a lucrat un timp în proiectarea avioanelor și folosea algebra matricială. Când a fost întrebată cum a descoperit subiectul, a răspuns că, dacă n-ar fi fost așa, teoria matricilor ar fi găsit-o pe ea. Așa este jocul matematic.

Idee de bază
combinarea blocurilor de numere

40 Coduri

Ce au în comun Iuliu Cezar și transmiterea semnalelor digitale moderne? Răspunsul este coduri și codificare. Pentru a trimite semnale digitale către un computer sau un televizor digital, codificarea imaginilor și a sunetelor într-un șir de 0 și de 1 – un cod binar – este esențială, pentru că este singurul limbaj pe care îl înțeleg aceste dispozitive. Cezar folosea coduri ca să comunice cu generalii lui și își păstra mesajele secrete schimbând literele cu ajutorul unei chei pe care o știau doar el și destinatarii.

Acuratețea era esențială pentru Cezar și este necesară și pentru transmiterea eficientă a semnalelor digitale. Cezar voia, de asemenea, să-și țină codurile doar pentru el, și la fel fac companiile de televiziune și cablu, care vor ca doar abonații plătitori să le poată folosi semnalele.

Să ne uităm mai întâi la acuratețe. Eroarea umană sau „zgomotul pe linie" pot să apară oricând și trebuie abordate. Gândirea matematică ne permite să construim sisteme de codificare care detectează automat erorile și chiar fac corecții.

DETECTAREA ȘI CORECTAREA ERORILOR

Unul dintre primele sisteme de codificare binară a fost codul Morse, care folosește două simboluri, punct • și linie –. Inventatorul american Samuel F.B. Morse a trimis primul mesaj interurban folosind acest cod în 1844, de la Washington spre Baltimore. Era un cod destinat telegrafului electric de la jumătatea secolului al XIX-lea, cu prea puțină preocupare pentru eficiență. În codul Morse, litera A este codificată • –, litera B este – • • •, litera C este – • – • și alte litere sunt reprezentate ca secvențe diferite de puncte și linii. Ca să transmită „CAB", operatorul de telegraf ar fi trimis șirul – • – • / • – / – • • •. Dincolo de meritele lui, codul Morse nu este foarte bun la detectarea erorilor, ca să nu mai vorbim despre corecții. Dacă telegrafistul ar fi vrut să transmită „CAB", dar ar fi bătut punct în loc de o linie în C, ar fi uitat linia din A, iar zgomotul de pe linie ar fi substituit un punct cu o linie în B, operatorul de la recepție ar fi primit • • – • / • / — • •, și nu ar fi văzut nimic greșit în a-l interpreta ca „FEZ".

CRONOLOGIE

55 î.Hr.	cca 1750	1844
Iuliu Cezar invadează Britannia și folosește coduri ca să comunice cu generalii lui.	Teorema lui Euler pune bazele criptografiei cu cheie publică.	Morse transmite primul mesaj folosind codul care îi poartă numele.

La un nivel mult mai primitiv, am putea analiza un sistem de codificare constând doar din 0 și 1, unde 0 reprezintă un cuvânt și 1 un altul. Să presupunem că un comandant de armată vrea să trimită trupelor lui un mesaj, care este fie „atacați", fie „nu atacați". Instrucțiunea „atacați" ar fi codificată prin „1", iar instrucțiunea „nu atacați" prin „0". Dacă un 1 sau un 0 ar fi fost transmise incorect, operatorul de la recepție nu avea cum să știe și ar fi transmis ordinul greșit, cu consecințe dezastruoase.

Putem îmbunătăți lucrurile folosind cuvinte de cod cu lungimea doi. Dacă, de data aceasta, codificăm instrucțiunea „atacați" cu 11 și „nu atacați" cu 00, este mai bine. O eroare la o cifră ar duce la primirea mesajelor 01 sau 10. Cum doar 11 și 00 sunt cuvinte de cod legitime, operatorul de la recepție ar fi sigur că a apărut o eroare. Avantajul acestui sistem este că o eroare ar fi detectabilă, dar tot nu am ști cum să o corectăm. Dacă s-ar primi 01, cum am putea să știm dacă mesajul trimis a fost 00 sau 11?

Modul de a obține un sistem mai bun constă în a combina modelul cu cuvinte de cod mai lungi. Dacă instrucțiunea „atacați" este codificată cu 111 și „nu atacați" cu 000, o greșeală la o cifră ar putea fi detectată cu siguranță, la fel ca înainte. Dacă am ști că se poate face cel mult o greșeală (o presupunere rezonabilă, de vreme ce probabilitatea să apară două erori într-un singur cuvânt cod este mică), corecția ar putea fi făcută de cel care recepționează mesajul. De exemplu, dacă se recepționează 110, atunci mesajul corect ar fi fost 111. Cu regulile noastre, nu ar putea fi 000, deoarece acest cuvânt de cod este la două erori distanță de 110. În acest sistem există doar două cuvinte de cod, 000 și 111, dar acestea sunt suficient de deosebite pentru a face posibile detectarea erorii și corectarea acesteia.

Același principiu este folosit la procesarea de texte, când este activat modul autocorect. Dacă tastăm „animul", procesorul de text detectează eroarea și o corectează, luând cuvântul cel mai apropiat, „animal".

Un cod binar modern este alcătuit din cuvinte de cod care sunt blocuri constând din cifre de 0 și de 1. Alegând cuvinte de cod legitime suficient de îndepărtate, sunt posibile atât detecția, cât și corecția. Cuvintele din codul Morse sunt prea apropiate, dar sistemele de coduri moderne folosite pentru a transmite date de la sateliți pot fi puse întotdeauna în modul autocorect. Cuvintele de cod lungi, cu performanțe înalte în termeni de corecție a erorilor, durează foarte mult să fie transmise, așadar se face un compromis între lungime și viteza de transmitere.

anii 1920
Este construită mașina Enigma.

1950
Richard Hamming publică o lucrare esențială privind detectarea și corectarea erorilor din coduri.

anii 1970
Este dezvoltată criptografia cu cheie publică.

Pentru călătoriile în spațiu, NASA a folosit coduri capabile să corecteze o triplă eroare, iar acestea s-au dovedit satisfăcătoare pentru combaterea zgomotului de pe linie.

SECRETIZAREA MESAJELOR

Iuliu Cezar își păstra mesajele secrete schimbând literele cu ajutorul unei chei pe care o știau doar el și generalii lui. Dacă respectiva cheie cădea în mâinile cui nu trebuia, mesajele puteau fi descifrate de inamici. În epoca medievală, Maria Stuart, regina Scoției, trimitea mesaje secrete cifrate din celula ei de închisoare. Maria avea de gând să o detroneze pe verișoara ei, regina Elisabeta, dar mesajele ei codificate au fost interceptate. Mai sofisticate decât metoda romanilor de a roti toate literele după o cheie, codurile ei se bazau pe substituție, dar acestea pot fi decriptate analizând frecvența literelor și a simbolurilor folosite. În timpul celui de-al Doilea Război Mondial, codul german Enigma a fost „spart" prin descoperirea cheii. În acest caz, provocarea a fost formidabilă, dar codul a fost întotdeauna vulnerabil, deoarece cheia era transmisă ca parte a mesajului.

O evoluție uimitoare în criptarea mesajelor s-a produs în anii 1970. Contrar a tot ceea ce se credea până atunci, s-a spus că o cheie secretă putea fi cunoscută tuturor și, totuși, mesajul să rămână în siguranță deplină. Aceasta se numește criptografie cu cheie publică. Metoda se bazează pe o teoremă veche de 200 de ani, dintr-o ramură a matematicii considerată a fi cea mai nefolositoare dintre toate.

CRIPTAREA CU CHEIE PUBLICĂ

Domnul John Sender, un agent secret cunoscut în lumea spionajului drept „J", tocmai a sosit în oraș și vrea să-i transmită superiorului lui, dr. Rodney Receiver, un mesaj secret ca să-și anunțe sosirea. Ceea ce face în continuare este mai degrabă ciudat. Merge la biblioteca publică, ia din raft o carte de telefon și îl caută pe dr. Rodney Receiver. Îl găsește lângă numele lui Receiver două numere – unul lung, 247, și unul scurt, 5. Informația este la îndemâna oricui și cât se poate de seacă, dar este toată informația de care John Sender are nevoie pentru a-și cripta mesajul, care, pentru simplitate, este chiar inițiala lui, J. Această literă este numărul 74 dintr-o listă de cuvinte, disponibilă și ea pentru public.

Sender criptează 74 calculând 74^5 (modulo 247), adică restul de la împărțirea lui 74^5 la 247. Putem afla cât este 74^5 folosind un calculator de buzunar, dar calculele trebuie făcute cu atenție:

$$74^5 = 74 \times 74 \times 74 \times 74 \times 74 = 2\,219\,006\,624$$

și

$$2\,219\,006\,624 = 8\,983\,832 \times 247 + 120$$

Așadar, când împarte acest număr uriaș la 247, el obține restul 120. Mesajul criptat al lui Sender este 120 și el i-l transmite lui Receiver. Deoarece numerele 247 și 5 erau disponibile public, oricine putea să cripteze un mesaj. Dar nu oricine putea să îl decripteze! Dr. R. Receiver mai are atuuri în mânecă! El și-a creat numărul personal 247 prin înmulțirea a două numere prime. În acest caz, a obținut numărul 247 înmulțind $p = 13$ și $q = 19$, însă doar el știe asta.

Acesta este momentul în care vechea teoremă a lui Leonhard Euler este scoasă și scuturată de praf. Dr. R. Receiver folosește ce se știe despre $p = 13$ și $q = 19$ ca să găsească o valoare a lui a pentru care $5 \times a \equiv 1$ modulo $(p - 1)(q - 1)$, unde simbolul $\equiv$ înseamnă egal în aritmetica modulară. Cât este a astfel încât împărțind $5 \times a$ la $12 \times 18 = 216$ să se obțină restul 1? Efectuând calculul propriu-zis, el descoperă că $a = 173$.

Deoarece el este singurul care cunoaște numerele prime p și q, dr. Receiver este singurul care poate calcula numărul 173. Cu ajutorul lui obține restul, împărțind uriașul număr 120^{173} la 247. Aceasta este mult peste posibilitățile unui calculator de buzunar, dar este ușor de găsit cu ajutorul unui computer. Răspunsul este 74, după cum știa Euler încă de acum 200 de ani. Cu această informație, Receiver caută cuvântul 74 și vede că J s-a întors în oraș.

Ați putea obiecta că un hacker ar descoperi cu siguranță faptul că $247 = 13 \times 19$ și codul ar putea fi spart. Aveți dreptate, însă principiul criptării și al decriptării rămâne același dacă dr. Receiver ar fi folosit alt număr în loc de 247. El poate alege două numere prime foarte mari și să le înmulțească, obținând un număr mult mai mare decât 247.

De fapt, este practic imposibil să găsești doi factori primi ai unui număr foarte mare – care sunt factorii lui 24 812 789 922 307, de exemplu? Dar pot fi alese numere și mai mari decât acestea. Sistemul cu cheie publică este sigur și, dacă puterea supercomputerelor reunite face față factorizării și criptării numărului, tot ceea ce are de făcut dr. Receiver este să folosească un număr și mai mare. Până la urmă, este mult mai ușor pentru dr. Receiver „să amestece cutii de nisip alb cu nisip negru" decât este pentru orice hacker să le separe.

Ideea de bază

păstrează mesajele secrete.

41 Aritmetică avansată

Ramura matematicii numită combinatorică este cunoscută uneori drept aritmetică avansată. Nu este vorba doar să aduni, în minte, o coloană de numere. „Cât de multe?" este o întrebare, dar la fel este și „cum pot fi combinate obiectele?" Problemele sunt deseori enunțate și atât, fără să fie însoțite de suprastructura greoaie a teoriei matematice – nu trebuie să știi prea multe despre cercetările prealabile, înainte să te apuci de treabă. Aceasta face problemele de combinatorică atât de atractive. Dar ele ar trebui însoțite de avertismente privind riscurile pentru sănătate: este posibil să dea dependență și, cu siguranță, provoacă insomnii.

O POVESTE DIN ST. IVES

Copiii pot să înceapă combinatorica la o vârstă fragedă. O poezioară tradițională pentru copii pune o întrebare de combinatorică:

Cum mergeam spre St. Ives,
Am întâlnit un bărbat cu șapte neveste;
Fiecare nevastă avea șapte saci,
În fiecare sac erau șapte pisici,
Fiecare pisică avea șapte pisoi.
Pisoi, pisici, saci și neveste,
Câți mergeau spre St. Ives?

Ultimul vers este întrebarea-capcană (răspuns: unu). Dar putem pune întrebarea și altfel: câți veneau de la St. Ives? Interpretările sunt importante. Putem fi siguri că bărbatul cu cele șapte neveste ale lui veneau toți de la St. Ives? Nevestele îl însoțeau pe bărbat când s-a întâlnit autorul cu el sau se aflau în altă parte? Prima cerință a unei probleme de combinatorică este să fie clară, ușor de înțeles.

CRONOLOGIE

cca 1800 î.Hr.	cca 1100 d.Hr.	1850
În Egipt, este scris papirusul Rhind.	Bhaskara lucrează cu permutări și combinări.	Kirkman pune problema celor 15 școlărițe.

Presupunem că tot grupul vine pe singurul drum dinspre orașul galez de la malul mării și că „pisoii, pisicile, sacii și nevestele" sunt cu toții de față. Câți veneau de la St. Ives? Tabelul următor ne dă o soluție:

bărbat	1	1
soții	7	7
saci	7 × 7	49
pisici	7 × 7 × 7	343
pisoi	7 × 7 × 7 × 7	2401
Total		2801

În 1858, Alexander Rhind, un anticar scoțian care a vizitat Luxorul, a dat peste un papirus lung de cinci metri, plin de matematică egipteană de pe la 1800 î.Hr. L-a cumpărat. Câțiva ani mai târziu, papirusul a fost achiziționat de British Museum, iar hieroglifele au fost traduse. Problema 79 din Papirusul Rhind este o problemă cu case, pisici, șoareci și grâu, foarte asemănătoare cu pisoii, pisicile, sacii și nevestele din St. Ives. Ambele implică puteri ale lui 7 și același tip de analiză. Combinatorica, se pare, are o istorie îndelungată.

NUMERE FACTORIALE

Problema cozilor ne face cunoștință cu prima armă din arsenalul combinatoricii – numărul factorial. Să presupunem că **Alan**, **Brian**, **Charlotte**, **David** și **Ellie** se așază la o coadă

E C A B D

cu Ellie în capul cozii, urmată de Charlotte, Alan și Brian, cu David la capăt. Dacă schimbă locurile între ei, se formează alte cozi; câte cozi diferite sunt posibile?

Arta numărării în această problemă depinde de alegeri. Există cinci alegeri pentru prima persoană pe care o așezăm la coadă, sunt patru alegeri pentru a doua persoană ș.a.m.d. Când ajungem la ultima poziție, nu mai există opțiuni, iar acest loc poate fi ocupat doar de singura persoană disponibilă. Există așadar $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ de cozi posibile. Dacă începem cu șase persoane, numărul de șiruri diferite va fi $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$, iar pentru șapte oameni vor fi $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$ de cozi posibile.

1930
Frank Ramsey lucrează în combinatorică.

1971
Ray-Chaudhuri și Wilson demonstrează existența sistemelor generale Kirkman

număr	factorial
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880

Un număr obținut prin înmulțirea numerelor întregi succesive se numește număr factorial. Acestea apar atât de des în matematică, încât sunt scrise folosind notația 5! (citește „cinci factorial”) în loc de 5 × 4 × 3 × 2 × 1. Să ne uităm la primele câteva factoriale (vom defini 0! egal cu 1). Observăm imediat că până și configurații destul de „mici” pot da naștere unor numere factoriale „mari”. Poate că numărul *n* este mic, dar *n!* poate fi uriaș.

Dacă suntem interesați să formăm șiruri de cinci oameni, dar acum putem să alegem dintr-un grup de opt oameni **A, B, C, D, E, F, G** și **H**, analiza este aproape aceeași. Există opt posibilități de alegere pentru prima persoană de la coadă, șapte pentru a doua ș.a.m.d. Dar de data aceasta sunt patru opțiuni pentru ultima persoană. Numărul de cozi posibile este

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720$$

Putem scrie aceasta cu notația pentru numere factoriale, deoarece

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \frac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{8!}{3!}$$

COMBINĂRI

Într-o coadă, ordinea contează. Cele două cozi

C E B A D **D A C E B**

sunt formate din aceleași litere, dar sunt cozi diferite. Știm deja că există 5! cozi care pot fi formate cu aceste litere. Dacă ne interesează să numărăm modurile de a selecta cinci oameni dintr-un grup de opt, indiferent de ordine, trebuie să împărțim 8 × 7 × 6 × 5 × 4 = 6 720 la 5! Numărul de posibilități de a selecta cinci oameni din opt este așadar

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$$

Acest număr, folosind simbolul C pentru combinări, este scris ${}^{8}C_{5}$ și este

$${}^{8}C_{5} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$$

La loteria națională, regulamentul cere o selecție de șase numere din 49 posibile – câte variante există?

$${}^{49}C_{6} = \frac{49!}{43!\,6!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13\,983\,816$$

O singură combinație este câștigătoare, așadar șansa de a câștiga premiul cel mare este de 1 la 14 milioane.

PROBLEMA LUI KIRKMAN

Combinatorica este un domeniu vast şi, chiar dacă este vechi, s-a dezvoltat rapid în ultimii 40 de ani, datorită relevanţei lui pentru ştiinţa computerelor. Problemele care implică teoria grafurilor, pătratele latine şi cele asemănătoare pot fi abordate ca parte a combinatoricii moderne.

Esenţa combinatoricii a fost exprimată de un maestru al domeniului, reverendul Thomas Kirkman, care a lucrat într-o perioadă în care combinatorica era legată mai ales de matematica recreativă. El a adus numeroase contribuţii originale la geometria discretă, teoria grupurilor şi combinatorică, dar nu a avut niciodată o funcţie universitară. Problema care i-a consolidat reputaţia de matematician al non-nonsensului este cea pentru care va rămâne cunoscut posterităţii. În 1850, Kirkman a prezentat „problema celor 15 şcolăriţe", în care fetele merg spre biserică în 5 rânduri de câte 3, în fiecare zi a săptămânii. Dacă v-aţi plictisit de Sudoku, puteţi încerca să o rezolvaţi. Trebuie să organizăm un program zilnic astfel încât două fete să nu meargă împreună mai mult de o dată. Folosind deliberat litere mici şi litere mari pe prima poziţie, fetele sunt: abigail, beatrice, constance, dorothy, emma, frances, grace, Agnes, Bernice, Charlotte, Danielle, Edith, Florence, Gwendolyn şi Victoria, „etichetate" cu a, b, c, d, e, f, g, A, B, C, D, E, F, G şi V.

Există, de fapt, şapte soluţii la problema lui Kirkman, iar cea pe care o dăm mai jos este „ciclică" – este generată prin „deplasare cu unu". Acesta este momentul în care intră în joc „etichetarea" şcolăriţelor.

luni	marţi	miercuri	joi	vineri	sâmbătă	duminică
a A V	b B V	c C V	d D V	e E V	f F V	g G V
b E D	c F E	d G F	e A G	f B A	g C B	a D C
c B G	d C A	e D B	f E C	g F D	a G E	b A F
d f g	e g a	f a b	g b c	a c d	b d e	c e f
e F C	f G D	g A E	a B F	b C G	c D A	d E B

Se numeşte ciclică deoarece, în fiecare zi, programul de mers este schimbat de la a la b, de la b la c, până la g, care devine a. Aceeaşi schemă se aplică fetelor notate cu majuscule: de la A la B, de la B la C şi tot aşa, până la Victoria, care rămâne neschimbată.

Justificarea subînţeleasă pentru alegerea notaţiei este că rândurile corespund liniilor din geometria Fano (vezi p. 114). Problema lui Kirkman nu este doar un joc de salon, ci una care face parte din corpul principal al matematicii.

Idee de bază
cât de multe combinaţii?

42 Pătratemagice

„Un matematician", scria G.H. Hardy, „la fel ca un pictor sau un poet, este un făcător de tipare." Pătratele magice au tipare foarte ciudate chiar și după standardele matematice. Ele se află la granița dintre matematica grea de simboluri și modelele fascinante iubite de jucătorii de puzzle.

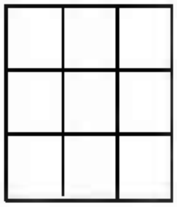
Un pătrat magic este o rețea pătrată în care, în fiecare celulă a rețelei, sunt scrise numere întregi distincte, astfel încât sumele pe fiecare rând orizontal, pe fiecare coloană verticală și pe fiecare diagonală să dea același număr.

Pătratele cu un singur rând și o singură coloană sunt magice din punct de vedere tehnic, dar sunt atât de plictisitoare încât o să le lăsăm deoparte. Nu există nici un pătrat magic cu două linii și două coloane. Dacă ar exista, ele ar trebui să aibă forma de alături. Cum sumele pe fiecare linie și pe fiecare coloană ar trebui să fie egale, atunci $a + b = a + c$. Aceasta înseamnă că $b = c$, contrazicând cerința ca toate numerele să fie distincte.

a	b
c	d

PĂTRATUL LO SHU

Cum pătrate magice 2×2 nu există, trecem la cele 3×3 și vom încerca să construim unul. Începem cu un pătrat magic *normal*, unul în care rețeaua este completată cu numerele consecutive 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9.



Pentru un pătrat atât de mic, este posibil să construim un pătrat magic 3×3 prin metoda „încercare și eroare", dar, mai întâi, să facem câteva deducții, care ne vor fi de ajutor. Dacă adunăm toate numerele din rețea avem

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

iar acest total trebuie să rămână același când adunăm totalurile de pe fiecare dintre cele trei linii. Aceasta înseamnă că suma numerelor de pe fiecare rând (sau coloană, sau diagonală) trebuie să fie 15. Să ne uităm acum celula din mijloc – o vom numi c. Această celulă apare pe cele două diagonale, ca și pe rândul și pe coloana din mijloc. Dacă adunăm numerele de pe aceste patru linii, obținem 15 + 15 + 15 + 15 = 60, care

CRONOLOGIE

cca 2800 î.Hr.
Se naște legenda pătratului Lo Shu

cca 1690
de la Loubère pune la punct metoda siameză pentru construirea de pătrate magice

1693
Bernard Frénicle de Bessy alcătuiește lista tuturor celor 880 de pătrate magice 4×4 posibile

trebuie să fie egal și cu toate numerele adunate împreună, plus cei trei c suplimentari. Din ecuația $3c + 45 = 60$, vedem că c trebuie să fie 5. Se mai pot afla și alte lucruri, cum ar fi că nu putem să plasăm 1 într-una dintre celulele de colț. Odată ce avem câteva indicii, ne va fi mai ușor să aplicăm metoda „încercare și eroare". Încercați!

8	1	6
3	5	7
4	9	2

O soluție pentru pătratul 3×3 prin metoda siameză

Desigur că ne-ar conveni să avem o metodă complet sistematică pentru construirea pătratelor magice. Una dintre ele a fost găsită de Simon de la Loubère, ambasadorul Franței la curtea regelui Siamului, la sfârșitul secolului al XVII-lea. Loubère a devenit interesat de cercetările matematicienilor chinezi și a conceput o metodă pentru construirea de pătrate magice care au un număr impar de linii și coloane. Această metodă începe prin plasarea cifrei 1 la mijlocul primei linii și apoi „mergând în sus și pe diagonală și rotind la nevoie" pentru plasarea lui 2 și a numerelor următoare. Dacă se blochează, se trece la următorul număr de sub numărul curent.

Remarcabil la acest pătrat magic normal este, în esență, că este singurul cu trei linii și trei coloane. Oricare alt pătrat magic 3×3 poate fi obținut din acesta prin rotirea numerelor în jurul mijlocului și/sau prin reflectarea numerelor față de coloana sau de linia din mijloc. Este numit pătratul „Lo Shu" și era cunoscut în China în jurul anului 3000 î.Hr. Legenda spune că a fost văzut pentru prima dată pe spatele unei țestoase care ieșea din râul Lo. Localnicii l-au interpretat ca pe un semn trimis de zei că nu vor scăpa de molimă dacă nu fac mai multe ofrande.

Dacă există un singur pătrat magic 3×3, câte pătrate magice 4×4 diferite există? Răspunsul șocant este că sunt 880 diferite (și, țineți-vă bine, există 2 202 441 792 de pătrate magice 5×5). Nu știm câte pătrate magice există pentru o valoare generică a lui *n*.

PĂTRATELE LUI DÜRER ȘI FRANKLIN

Pătratul magic Lo Shu este bine cunoscut pentru vechimea și unicitatea lui, dar un pătrat magic 4×4 a devenit un simbol prin asocierea cu un artist celebru. În plus, el are mult mai multe proprietăți decât altele din cele 880 de versiuni diferite de pătrate magice. Este pătratul 4×4 din gravura *Melancolia* a lui *Albrecht Dürer*, realizată în anul 1514.

În pătratul lui Dürer, toate liniile au suma numerelor egală cu 34, ca și coloane, diagonale și pătrate 2×2 mai mici care alcătuiesc pătratul 4×4 mare. Dürer chiar a reușit să își „semneze" capodopera cu data terminării ei în mijlocul liniei de jos.

1770 Euler realizează un pătrat de numere la pătrat

1986 Sallows își creează pătratul din litere

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Omul de știință și diplomatul american Benjamin Franklin și-a dat seama că alcătuirea de pătrate magice era un instrument foarte bun pentru antrenamentul minții. Era el însuși adeptul acestei activități și nici până în ziua de azi matematicienii nu au înțeles cum proceda, pătratele magice mari nu pot fi construite la noroc. Franklin a mărturisit că pierduse mult timp cu ele în tinerețe, chiar dacă în copilărie nu era pasionat de „aritmetică". Iată aici unul pe care l-a descoperit în tinerețe.

În acest pătrat magic normal există tot felul de simetrii. Toate liniile, coloanele și diagonalele au suma numerelor egală cu 260, ca și „liniile îndoite", dintre care am evidențiat una. Sunt multe alte lucruri de descoperit – cum ar fi că suma pătratului 2x2 din centru plus cele patru celule din colțuri este tot 260. Uitați-vă mai atent și veți descoperi un rezultat interesant pentru fiecare pătrat 2x2.

PĂTRATE LA PĂTRAT

Unele pătrate magice pot avea celule ocupate de numere diferite, care sunt și ele pătrate perfecte. Problema construirii lor a fost pusă de matematicianul francez Édouard Lucas în 1876. Până acum nu a fost găsit nici un pătrat 3×3 de numere la pătrat, chiar dacă unul a fost foarte aproape.

127^2	46^2	58^2
2^2	113^2	94^2
74^2	82^2	97^2

Toate liniile, coloanele și una din diagonalele acestui pătrat au suma numerelor egală cu 21 609, dar cealaltă diagonală nu îndeplinește cerințele, deoarece $127^2 + 113^2 + 97^2 = 38\ 307$. Dacă vă tentează să găsiți și dumneavoastră unul, ar trebui să țineți cont de un fapt dovedit deja: valoarea înscrisă în celula din centru trebuie să fie mai mare decât $2,5 \times 10^{14}$, așa că nu are rost să căutați un pătrat cu numere mici. Aceasta este matematică serioasă, care are legătură cu curbele eliptice, subiectul folosit pentru a demonstra Marea Teoremă a lui Fermat. S-a dovedit că nu există pătrate magice 3×3 ale căror elemente să fie numere la puterea a treia sau a patra.

Căutarea pătratelor de numere pătrate a fost, totuși, încununată de succes pentru pătrate mai mari. Există pătrate magice 4×4 și 5×5. În 1770, Euler a produs un exemplu, fără să arate însă și metoda lui de construcție. De atunci au fost găsite familii întregi având legătură cu studiul algebrei cuaternionilor, numerele imaginare cvadridimensionale.

PĂTRATE MAGICE EXOTICE

Pătratele magice mari pot avea proprietăți spectaculoase. Specialistul în pătrate magice William Benson a produs unul 32×32, în care numerele, pătratele lor și cuburile formează, toate, pătrate magice. În 2001, a fost produs un pătrat 1024×1024, în care numerele, pătratele lor și cuburile formează, toate, pătrate magice.

Putem crea o întreagă varietate de alte pătrate magice, în cazul în care cerințele sunt mai relaxate. Pătratele magice normale sunt în tendințe. Dacă înlăturăm condiția conform căreia suma elementelor de pe diagonale trebuie să fie egală cu suma liniilor și a coloanelor, avem o mulțime de rezultate specializate. Putem căuta pătrate ale căror elemente sunt doar numere prime sau putem lua în considerare și alte forme, pe lângă pătrate, care să aibă „proprietăți magice". Trecând la dimensiuni superioare, ajungem la cuburi și hipercuburi magice.

Dar titlul de cel mai grozav dintre toate pătratele magice, în primul rând pentru proprietățile lui stranii, trebuie să meargă la un modest pătrat 3×3 produs de inginerul electronist și scriitor prolific din Olanda, Lee Sallows:

5	22	18
28	15	2
12	8	25

Ce este atât de grozav aici? Mai întâi să scriem numerele în cuvinte, în engleză:

five	twenty-two	eighteen
twenty-eight	fifteen	two
twelve	eight	twenty-five

Apoi numărăm literele care formează fiecare cuvânt și obținem:

4	9	8
11	7	3
6	5	10

Extraordinar, acesta este un pătrat magic format din numerele consecutive 3, 4, 5, până la 11. Mai constatăm că numărul de litere (în limba engleză) al sumelor magice pentru ambele pătrate 3x3 (21 și 45) este 9, iar 3 × 3 = 9.

Idee de bază
vrăjitorie matematică

43 Pătratelatine

Vreme de câțiva ani, lumea a fost înnebunită după Sudoku. Peste tot, capetele creioanelor și ale pixurilor erau ronțăile nervos, în așteptarea inspirației care să dezvăluie ce număr trebuia pus în căsuță. Să fie 4 sau să fie 5? Poate că este 9. Navetiștii coborau din trenurile de dimineață după un efort mental mai mare decât cel pe care aveau să-l facă în tot restul zilei. Seara, cina se ardea în cuptor. O fi 5, o fi 4 sau poate 7? Toți acești oameni se jucau cu pătrate latine – și erau matematicieni.

	4		8		9			
		7						3
		9	7			2	6	
3				1		7		9
			6	9	8			
1		5		2				6
	2	3			6	5		
6						1		
			5		2		8	

SUDOKU DEZVĂLUIT

Jocul de Sudoku constă dintr-o rețea 9×9 cu unele celule completate cu numere. Obiectivul este să completezi toate celulele, folosind numerele date ca indicii. Fiecare linie și fiecare coloană trebuie să conțină doar câte una din cifrele 1, 2, 3,... 9, ca și pătratele mai mici 3×3 care formează pătratul mare.

Se crede că Sudoku (însemnând „cifre unice") a fost inventat la sfârșitul anilor 1970. A devenit foarte popular în Japonia, în anii 1980, înainte să cucerească planeta, până în 2005. Atracția acestui puzzle, spre deosebire de rebus, stă în faptul că nu trebuie să ai cultură generală ca să încerci să îl rezolvi, dar, la fel ca rebusul, poate fi o provocare. Dependenții de ambele forme de autotortură au multe în comun.

PĂTRATE LATINE 3×3

O rețea pătrată care conține exact câte un simbol pe fiecare linie și pe fiecare coloană se numește un pătrat latin. Numărul de simboluri este egal cu mărimea pătratului și se numește „ordinul" acestuia. Putem completa o rețea 3×3 astfel încât fiecare linie și fiecare coloană să conțină exact unul dintre simbolurile a, b și c? Dacă putem, acesta ar fi un pătrat latin de ordinul 3.

CRONOLOGIE

1779 d.Hr.
Euler studiază teoria pătratelor latine.

1900
Tarry arată că nu există pătrate latine ortogonale de ordin 6.

1925
Fisher propune folosirea pătratelor latine la gândirea experimentelor statistice.

Când a introdus conceptul de pătrat latin, Leonhard Euler l-a numit „un fel de pătrat magic". Spre deosebire de pătratele magice, însă, pătratele latine nu au exclusiv de-a face cu aritmetica, iar simbolurile nu trebuie să fie numere. Motivul pentru care este numit astfel este, pur și simplu, că simbolurile folosite pentru construirea lui sunt luate din alfabetul latin, în timp ce Euler folosea caractere grecești pentru alte pătrate.

a	b	c
b	c	a
c	a	b

Este ușor de pus pe hârtie un pătrat latin 3×3.

Dacă ne gândim la a, b și c ca fiind zile ale săptămânii – luni, miercuri și vineri – pătratul poate fi folosit pentru a programa întâlniri între oameni din două echipe. Echipa Unu este formată din Larry, Mary și Nancy, iar Echipa Doi din Ross, Sophie și Tom.

	R	S	T
L	a	b	c
M	b	c	a
N	c	a	b

De exemplu, Mary din Echipa Unu se întâlnește cu Tom din Echipa Doi luni (intersecția liniei M cu T este a = luni). Aranjamentul din pătratul latin garantează că se întâlnește fiecare pereche de membri ai echipelor și că datele nu se suprapun.
Acesta nu este singurul pătrat latin 3×3 posibil. Dacă interpretăm A, B și C ca fiind subiectele discutate la întâlnirile dintre Echipa Unu și Echipa Doi, putem genera un pătrat latin care să garanteze că fiecare persoană discută un subiect diferit cu membrii celeilalte echipe.

	R	S	T
L	A	B	C
M	C	A	B
N	B	C	A

Așadar, Mary din Echipa Unu discută subiectul *C* cu Ross, subiectul *A* cu Sophie și subiectul *B* cu Tom.

1960

Conjectura lui Euler despre inexistența anumitor perechi de pătrate latine este contrazisă de Bose, Parker și Shrikhande

1979

Jocurile de tip Sudoku sunt inventate la New York

Dar când ar trebui să aibă loc discuția, între cine și cu ce subiect? Care ar fi programul pentru această organizare mai complexă? Din fericire, cele două pătrate latine pot fi combinate simbol cu simbol, pentru a genera un pătrat latin compozit, în care fiecare dintre cele nouă perechi de zile și subiecte posibile apare într-o singură poziție.

	R	S	T
L	a, A	b, B	c, C
M	b, C	c, A	a, B
N	c, B	a, C	b, A

O altă interpretare pentru pătrat este istorica „problemă a celor nouă ofițeri", în care nouă ofițeri, care aparțin de trei regimente *a*, *b* și *c* și care au gradele *A*, *B* și *C*, sunt aranjați în formație de paradă astfel încât fiecare linie și fiecare coloană să conțină câte un ofițer de la fiecare regiment și cu fiecare grad. Pătratele latine care se combină în acest mod se numesc „ortogonale". Cazul 3×3 este simplu, dar găsirea unor pătrate latine ortogonale mai mari nu este deloc ușoară. Este ceea ce a descoperit Euler.

În cazul unui pătrat latin 4×4, o „problemă a celor 16 ofițeri" ar fi să se aranjeze cele 16 cărți de joc cu figuri într-un pătrat, astfel încât pe fiecare linie și pe fiecare coloană să se găsească un rang (as, rege, regină, valet) și o suită (pică, treflă, cupă și caro). În 1782, Euler a pus aceeași problemă pentru „36 de ofițeri". În esență, el căuta două pătrate ortogonale de ordin 6. Nu a putut să le găsească și a presupus că nu existau perechi de pătrate latine ortogonale de ordinele 6, 10, 14, 18, 22... Se putea demonstra acest lucru?

Aici a intrat în scenă Gaston Tarry, un matematician amator care lucra ca funcționar public în Algeria. El a cercetat amănunțit exemplele și până în 1900, a verificat conjectura lui Euler într-un singur caz: nu există nici o pereche de pătrate latine ortogonale de ordin 6. Evident, matematicienii au presupus că Euler avea dreptate și în celelalte cazuri: 10, 14, 18, 22...

În 1960, eforturile combinate a trei matematicieni au șocat lumea matematică, demonstrând că Euler se înșelase în *toate* celelalte cazuri. Raj Bose, Ernest Parker și Sharadchandra Shrikhande au demonstrat că există într-adevăr perechi de pătrate latine ortogonale de ordinele 10, 14, 18, 22... Singurul caz în care nu există pătrate latine (în afara celor banale, de ordin 1 și 2) este ordinul 6.

Am văzut că există două pătrate latine de ordinul 3 reciproc ortogonale. Se poate demonstra că nu există niciodată mai mult de $n-1$ pătrate latine de ordin n reciproc ortogonale, așadar pentru $n = 10$, de exemplu, nu pot exista mai mult de nouă pătrate reciproc ortogonale. Găsirea lor este însă o altă poveste. Până acum, nimeni nu a fost în stare să producă măcar trei pătrate latine de ordin 10 care să fie reciproc ortogonale.

SUNT FOLOSITOARE PĂTRATELE LATINE?

R.A. Fisher, un eminent statistician, a văzut utilitatea practică a pătratelor latine. El le-a folosit ca să revoluţioneze metodele agricole din vremea sa, la Centrul de cercetare Rothamsted, din Hertfordshire, Marea Britanie.

Fisher urmărea să studieze eficienţa îngrăşămintelor asupra recoltelor. Ideal ar fi fost să plantăm culturile în condiţii de sol identice, astfel încât calitatea solului să nu fie un factor nedorit de influenţă asupra produsului final. Am putea aplica atunci diferiţi fertilizatori în siguranţă, fără să mai avem griji legate de calitatea solului. Singura modalitate de a asigura condiţii de sol identice ar fi să folosim acelaşi sol – dar nu este practic să tot sapi şi să replantezi culturile. Chiar dacă ar fi posibil acest lucru, condiţiile meteorologice diferite ar putea deveni un nou motiv de îngrijorare.

O modalitate de a evita aceste perturbări este folosirea pătratelor latine. Să luăm cazul testării a patru tratamente de fertilizare. Dacă împărţim un câmp pătrat în 16 loturi, putem lua în considerare un pătrat latin ca o descriere a câmpului în care calitatea solului variază pe „verticală" şi pe „orizontală".

Cei patru fertilizatori sunt aplicaţi aleatoriu în schema etichetată *a*, *b*, *c* şi *d*, astfel încât exact unul să fie aplicat pe fiecare linie şi pe fiecare coloană, într-o încercare de a înlătura variaţia calităţii solului. Dacă bănuim că şi un alt factor poate influenţa producţia agricolă, ne putem ocupa şi de acesta. Să presupunem că momentul zilei în care aplicăm tratamentul poate fi şi el un factor. Etichetăm patru perioade de timp ale zilei cu *A*, *B*, *C* şi *D* şi folosim pătrate latine ortogonale ca să imaginăm schema după care strângem datele. Aceasta garantează că fiecare tratament la fiecare moment de timp este aplicat pe unul dintre loturi. Schema experimentului ar fi:

a, perioadă A	b, perioadă B	c, perioadă C	d, perioadă D
b, perioadă C	a, perioadă D	d, perioadă A	c, perioadă B
c, perioadă D	d, perioadă C	a, perioadă B	b, perioadă A
d, perioadă B	c, perioadă A	b, perioadă D	a, perioadă C

Pot fi selectaţi şi alţi factori, avansând spre crearea unor scheme din ce în ce mai elaborate de pătrate latine. Euler nici nu visa că soluţia lui la problema cu ofiţerii se va aplica experimentelor agricole.

Idee de bază
Sudoku dezvăluit

44 Matematica banilor

Norman este un vânzător mai mult decât entuziast când vine vorba de biciclete. El crede că este datoria lui să-i asigure fiecărui om o bicicletă, așa că este încântat când in magazinul lui intră un client care, fără să ezite, cumpără o bicicletă de 99£. Clientul plătește cu un cec de 150£ și, cum băncile sunt închise, Norman îl roagă pe vecinul lui să i-l schimbe în bani gheață. Se întoarce și îi dă 51£ rest clientului, care pleacă pe bicicletă, în viteză. Urmează dezastrul. Banca respinge cecul, vecinul își cere banii înapoi, iar Norman trebuie să ceară un împrumut de la un prieten. Bicicleta l-a costat inițial 79£, dar câți bani a pierdut până la urmă Norman?

Conceptul acestei mici ghicitori a fost propus de marele creator de enigme Henry Dudeney. Este matematică financiară, într-un fel, dar mai corect este să o numim o ghicitoare care are legătură cu banii. Arată în ce fel banii depind de timp și că inflația funcționează în continuare. Scriind în anul 1920, bicicleta lui Dudeney l-a costat, de fapt, pe cumpărător 15£. O modalitate de a combate inflația este prin dobânda pe bani. Aceasta este o chestiune de matematică serioasă și ține de piața financiară modernă.

DOBÂNDA COMPUSĂ

Există două tipuri de dobândă, cunoscute drept simplă și compusă. Să ne concentrăm interesul matematic asupra a doi frați, Charlie Compus și Simon Simplu. Tatăl lor le-a dat câte 1 000£ fiecăruia și amândoi au depus banii la o bancă. Charlie Compus alege întotdeauna un depozit la care se oferă dobândă compusă, dar Simon Simplu este mai tradiționalist și preferă conturile care folosesc dobânzi simple. Istoric, dobânda compusă a fost identificată cu uzura și privită cu reținere. În zilele noastre, dobânda compusă este omniprezentă, element central al sistemelor monetare

CRONOLOGIE

3000 î.Hr.
Babilonienii folosesc un sistem sexagesimal de numere, pentru operațiunile financiare.

1494 d.Hr.
Luca Pacioli publică tabele financiare și o relatare despre registrele cu dublă intrare

moderne. Dobânda compusă este dobândă la dobândă și de asta îi place lui Charlie. Dobânda simplă nu are astfel de caracteristici și este calculată la o sumă dată, numită „principal". Simon o poate înțelege cu ușurință, întrucât principalul îi aduce aceeași sumă, ca dobândă, în fiecare an.

Când vorbești despre matematică, este întotdeauna bine să îl ai pe Albert Einstein de partea ta – pretenția extrem de răspândită că el ar fi spus despre dobânda compusă că este cea mai mare descoperire din toate timpurile este, însă, forțată. Nu se poate, totuși, nega că formula dobânzii compuse are o utilitate imediată mai mare decât $E = mc^2$ a lui. Dacă economisești bani, dacă împrumuți, folosești un card de credit, faci o ipotecă sau plătești o anuitate, formula dobânzii compuse este întotdeauna în fundal, lucrând pentru tine (sau împotriva ta). Ce reprezintă simbolurile din formulă? Termenul P reprezintă fondul principal (banii pe care îi economisești sau îi împrumuți), i este rata procentuală a dobânzii împărțită la 100 și n este numărul de perioade de timp.

$$A = P \times (1 + i)^n$$

Formula dobânzii compuse

Charlie își plasează cele 1 000£ într-un cont cu o dobândă anuală de 7%. Cu cât îi va crește suma în trei ani? Aici $P = 1\,000$, $i = 0{,}07$ și $n = 3$. Simbolul A reprezintă suma mărită și, cu formula dobânzii compuse, obținem $A = 1\,225{,}04$£.

Contul lui Simon are aceeași rată a dobânzii, 7%, ca dobândă simplă. Cât vor fi, comparativ, economiile lui după trei ani? Pentru primul an, el câștigă 70£ din dobândă, iar suma rămâne aceeași pentru al doilea și al treilea an. El va câștiga, așadar, din dobânzi 3 × 70£, obținând o sumă mărită la 1 210£. Investiția lui Charlie a fost o decizie mai bună.

Sumele de bani care se măresc prin compunerea dobânzilor pot crește foarte rapid. Acesta este un lucru bun dacă economisești, dar nu și dacă împrumuți. O componentă cheie a dobânzii compuse este perioada la care are loc compunerea dobânzilor. Charlie a auzit de o schemă care plătește 1% la săptămână, un penny pentru fiecare liră. Cât ar putea să câștige dintr-o astfel de investiție?

Simon crede că știe răspunsul: el sugerează să înmulțim rata dobânzii, de 1%, cu 52 (numărul de săptămâni dintr-un an) și obținem o rată anuală de 52%. Aceasta înseamnă un câștig din dobândă de 520£, aducând la 1 520£ totalul din cont. Charlie îi reamintește, însă, de magia dobânzii compuse și a formulei de compunere a dobânzii.

1718
Abraham de Moivre studiază statisticile de mortalitate și bazele teoriei anuităților

1756
James Dodson publică *Primele prelegeri despre asigurări*

1848
Este fondat Institutul de Contabilitate din Londra

Cu P = 1 000€, i = 0,01 și n = 52, Charlie calculează suma finală ca fiind 1 000 × $(1,01)^{52}$. Folosindu-și calculatorul de buzunar, el obține rezultatul 1 677,69€, mult mai mare decât suma calculată de Simon Simplu. Rata anuală a dobânzii echivalente a lui Charlie este 67,769%, mult mai mare decât cele 52% calculate de Simon.

Simon este impresionat, dar banii lui sunt deja la bancă, în regim de dobândă simplă. El se întreabă cât timp îi va lua să își dubleze suma inițială, de 1 000£. În fiecare an, câștigă 70€ din dobânzi, așa că tot ce trebuie să facă este să împartă 1 000 la 70. Rezultatul este 14,29, așa că poate fi sigur că peste 15 ani va avea mai mult de 2 000£ la bancă. Cam mult de așteptat. Ca să demonstreze superioritatea dobânzii compuse, Charlie începe să calculeze și el perioada în care i se dublează banii. Aceasta este mai complicat, dar un prieten îi spune despre regula lui 72.

REGULA LUI 72

Pentru o rată a dobânzii dată, regula lui 72 este o formulă empirică pentru estimarea perioadelor de dublare a banilor. Charlie este interesat de ani, dar regula lui 72 se aplică la fel de bine pentru luni sau pentru zile. Ca să afle perioada de dublare a banilor, Charlie nu trebuie decât să împartă 72 la rata dobânzii. Calculul este $^{72}/_{7}$ = 10,3, așadar Charlie își poate anunța fratele că investiția lui se va dubla în 11 ani, mult mai repede decât în cei 15 ani ai lui Simon. Regula este o aproximare, dar este utilă atunci când trebuie luată rapid o decizie.

VALOAREA ACTUALĂ

Tatăl lui Charlie Compus este atât de impresionat de simțul financiar al fiului său, încât îl ia deoparte și îi propune să îi dea 100 000£. Charlie este entuziasmat. Tatăl lui adaugă, însă, condiția: îi va da cele 100 000£ doar atunci când Charlie va împlini 45 de ani, iar asta nu se va întâmpla decât peste 10 ani. Charlie nu mai este așa de bucuros.

Charlie vrea să cheltuiască banii acum, dar evident nu poate. El se duce la banca lui și le promite 100 000£ peste 10 ani. Banca îi răspunde că timpul înseamnă bani și că 100 000£ peste 10 ani nu este același lucru cu 100 000£ acum. Banca trebuie să estimeze cât de mare trebuie să fie investiția de acum ca să crească la 100 000£ în 10 ani. Aceasta este suma pe care i-o va împrumuta lui Charlie. Banca consideră că o rată de creștere de 12% îi va asigura un profit sănătos. Care ar fi suma de acum care, la o rată a dobânzii de 12%, va crește la 100 000£ în 10 ani? Formula de compunere a dobânzii poate fi folosită și pentru acest tip de probleme. De data aceasta ni se dă A = 100 000£ și trebuie să calculăm P, valoarea actuală a lui A. Cu n = 10 și i = 0,12, banca va fi dispusă să îi dea în avans lui Charlie $^{100000}/_{(1,12)^{10}}$ = 32 197,32£. Charlie este destul de șocat de suma atât de mică, dar tot va putea să își cumpere acel Porsche nou.

CUM POT FI ABORDATE PLĂȚILE REGULATE?

Acum, că tatăl lui Charlie i-a promis să-i dea 100 000£ peste 10 ani, trebuie să economisească bani. El plănuiește să o facă printr-o serie de plăți egale, făcute într-un cont de economii la sfârșitul fiecărui an, timp de 10 ani. La sfârșitul acestei perioade, el va fi în măsură să-i dea banii lui Charlie în ziua în care i-a promis că o va face, iar Charlie va putea merge cu banii la bancă, să își plătească împrumutul.

$$S = R \times \frac{((1+i)^n - 1)}{i}$$

Formula plăților regulate

Tatăl lui Charlie nu reușește să găsească un cont care să-l permită să facă asta, un cont care să plătească o rată anuală a dobânzii de 8% pentru întreaga perioadă de 10 ani. El îi dă lui Charlie misiunea de a calcula plățile anuale. Cu formula dobânzii compuse, Charlie era preocupat de o singură plată (principalul de la început), dar acum trebuie să se ocupe de zece plăți, făcute la momente diferite de timp. Dacă la sfârșitul fiecărui an se face plata R, într-un cont cu rata dobânzii i, suma economisită după n ani poate fi calculată cu formula plăților regulate.

Charlie știe că S = 100 000£, n = 10 și i = 0,08 și calculează că R = £6 902,95.

Acum, că Charlie are un Porsche nou-nouț mulțumită băncii, are nevoie de un garaj în care să îl țină. Decide să facă un credit ipotecar de 300 000£ ca să cumpere o casă, o sumă pe care o va restitui printr-o serie de plăți anuale, timp de 25 de ani. El privește asta ca pe o problemă în care 300 000£ este o valoarea actuală ce urmează să fie acoperită printr-un șir de plăți și calculează cu ușurință cât are de plătit în fiecare an. Tată lui este impresionat și se folosește din nou de priceperea lui Charlie. Tocmai a primit la pensionare un bonus de 150 000£ și vrea să cumpere o anuitate. „În regulă", spune Charlie, „putem folosi aceeași formulă, pentru că matematica este aceeași. În loc ca firma cu creditele ipotecare să-mi avanseze mie banii pe care să-i restitui în rate, le dai tu banii, iar ei vor face plățile regulate către tine."

Apropo, răspunsul la ghicitoarea lui Henry Dudeney este 130£, sumă compusă din cele 51£ pe care Norman le-a plătit clientului și cele 79£ pe care le-a plătit pentru bicicletă.

Idee de bază
dobânda compusă este mai bună.

45 Problema dietei

Tanya Smith își ia foarte în serios pregătirea sportivă. Ea merge în fiecare zi la sală și își monitorizează îndeaproape dieta. Tanya își câștigă existența din slujbe cu program parțial de lucru și trebuie să fie atentă cu banii. Este esențial să ia în fiecare lună cantitățile potrivite de minerale și de vitamine, ca să fie sănătoasă și în formă. Cantitățile au fost stabilite de antrenorul ei. El este de părere că o viitoare campioană olimpică trebuie să beneficieze de 120 mg de vitamine și de cel puțin 880 mg de minerale în fiecare lună. Ca să fie sigură că respectă regimul, Tanya se bazează pe două suplimente alimentare. Unul este în formă solidă și este comercializat sub denumirea Solido, iar celălalt este sub formă lichidă, vândut sub numele Liquex. Problema ei este să decidă cât trebuie să cumpere lunar din fiecare, ca să-l mulțumească pe antrenorul ei.

Problema clasică a dietei constă în organizarea unei diete sănătoase, plătind pentru ea prețul cel mai mic. A fost un prototip pentru problemele de programare liniară, un subiect elaborat în anii 1940 și care este folosit acum într-o serie largă de aplicații.

La începutul lunii martie, Tanya merge la supermarket și caută Solido și Liquex. Pe spatele unui pachet de Solido citește că acesta conține 2 mg vitamine și 10 mg minerale, în timp ce o cutie cu Liquex conține 3 mg vitamine și 50 mg minerale. Ea își umple conștiincios căruciorul cu 30 de pachete de Solido și 5 cutii de Liquex, ca să aibă pentru toată luna. În drum spre casă, se întreabă dacă a luat cantitatea potrivită. Mai întâi calculează câte vitamine are în cărucior. În cele 30 de pachete de Solido are 2 × 30 = 60 mg vitamine, iar în Liquex, 3 × 5 = 15 mg. În total,

	Solido	Liquex	Cerințe
Vitamine	2 mg	3 mg	120 mg
Minerale	10 mg	50 mg	880 mg

CRONOLOGIE

1826 d.Hr.
Fourier anticipează programarea liniară. Gauss rezolvă ecuații liniare prin eliminare gaussiană.

1902
Farkas oferă o soluție a sistemelor inegalităților.

1945
Stigler rezolvă problema dietei printr-o metodă euristică.

are $2 \times 30 + 3 \times 5 = 75$ mg. Repetând calculul pentru minerale, ea are $10 \times 30 + 50 \times 5 = 550$ mg minerale.

Cum antrenorul i-a cerut să ia cel puțin 120 mg vitamine și 880 mg minerale, are nevoie de mai multe cutii și pachete. Problema Tanyei este să jongleze cu cantitățile de Solido și Liquex, ca să acopere necesarul de vitamine și minerale. Ea se întoarce la raionul de suplimente alimentare din supermarket și mai pune în cărucior pachete și cutii. Are acum 40 de pachete și 15 cutii. Oare sunt destule? Ea calculează din nou și constată că are $2 \times 40 + 3 \times 15 = 125$ mg vitamine și $10 \times 40 + 50 \times 15 = 1\,150$ mg minerale. Acum Tanya a îndeplinit cu siguranță cerințele antrenorului, ba chiar a depășit cantitățile necesare.

SOLUȚII FEZABILE

Combinația (40, 15) de alimente îi va permite Tanyei să își respecte dieta. Aceasta este numită o combinație posibilă sau o soluție „fezabilă". Am văzut deja că (30, 5) nu este o soluție fezabilă, așadar există o demarcație între cele două tipuri de combinații–soluții fezabile, în care necesarul dietei este acoperit, și soluțiile nefezabile, în care nu respectă dieta.

Tanya are mult mai multe opțiuni. Ea ar putea să-și umple căruciorul doar cu Solido. Dacă ar face asta, ar trebui să cumpere cel puțin 88 de pachete. Achiziția (88, 0) satisface ambele cerințe, deoarece această combinație ar conține $2 \times 88 + 3 \times 0 = 176$ mg vitamine și $10 \times 88 + 50 \times 0 = 880$ mg minerale. Dacă ar cumpăra doar Liquex, ar avea nevoie de cel puțin 40 de cutii, iar soluția fezabilă (0, 40) satisface cerințele și în materie de vitamine, și de minerale, pentru că $2 \times 0 + 3 \times 40 = 120$ mg vitamine și $10 \times 0 + 50 \times 40 = 2\,000$ mg minerale. Putem remarca, însă, că nici una dintre aceste combinații nu asigură cantitățile exacte de vitamine și minerale, deși antrenorul va fi cu siguranță satisfăcut că Tanya ia suficient.

SOLUȚII OPTIME

În discuție intră acum și banii. Când Tanya ajunge la casă, trebuie să plătească pentru ce are în cărucior. Ea observă că și pachetele, și cutiile au același preț, de 5£ fiecare. Pentru combinațiile fezabile găsite până acum (40, 15), (88, 0) și (0, 40), sumele de plată ar fi 275£, 440£ și 200£, așadar cea mai bună soluție ar fi să nu cumpere deloc Solido și să ia 40 de cutii de Liquex. Aceasta ar fi cea mai ieftină combinație și toate cerințele

1947

Dantzig formulează metoda simplex și rezolvă problema dietei prin programare liniară.

1984

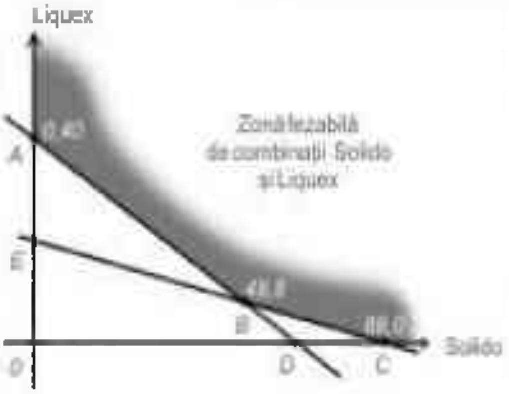
Karmarkar deduce un nou algoritm pentru rezolvarea problemelor de programare liniară.

dietei sunt satisfăcute. Dar misiunea nu este îndeplinită decât parțial. Sub impulsul momentului, Tanya a încercat diferite combinații de Solido și Liquex și a calculat costurile doar în aceste cazuri. Se putea descurca și mai bine? Există o combinație posibilă de Solido și Liquex care să-l mulțumească pe antrenor și, în același timp, să o coste cât mai puțin? Ce ar vrea ea să facă în acest moment este să meargă acasă și să analizeze problema cu o foaie de hârtie și un creion.

PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ

Tanya a fost instruită întotdeauna să-și vizualizeze obiectivele. Dacă poate aplica metoda la câștigarea aurului olimpic, de ce nu și la matematică? Așadar, ea desenează o imagine a zonei fezabile. Acest lucru este posibil deoarece ia în considerare doar două produse alimentare. Linia AD reprezintă combinațiile de Solido și Liquex care conțin exact 120 mg vitamine. Combinațiile de deasupra liniei au mai mult de 120 mg vitamine. Linia EC reprezintă combinațiile care conțin exact 880 mg minerale. Combinațiile de produse de deasupra acestor linii sunt zona fezabilă și reprezintă toate combinațiile fezabile pe care Tanya le-ar putea cumpăra.

Problemele de genul celei a dietei sunt probleme de programare liniare. Cuvântul „programare" înseamnă o procedură (utilizarea lui înainte să devină sinonim cu computerele), în timp ce „liniar" se referă la folosirea liniilor drepte. Ca să rezolve problema Tanyei cu programare liniară, matematicienii au arătat că tot ce trebuie să facem este să calculăm suma de plată pentru alimente, în punctele din colțuri de pe graficul Tanyei. Tanya a descoperit o nouă soluție fezabilă în punctul B cu coordonatele (48, 8), ceea ce înseamnă că ea ar trebui să cumpere 48 de pachete de Solido și 8 cutii de Liquex. Dacă face asta, își va respecta dieta exact, deoarece în această combinație sunt 120 mg de vitamine și 880 mg de minerale. La 5£ pachetul și cutia, combinația o va costa 280£. Așadar, varianta optimă de cumpărături va rămâne cea dinainte, adică ea n-ar trebui să cumpere deloc Solido, ci doar 40 de cutii de Liquex, la un preț total de 200£, chiar dacă va avea 1 120 mg vitamine, în exces față de cele 880 mg necesare.



Combinația optimă depinde, în cele din urmă, de costul relativ al suplimentelor. Dacă prețul pachetului de Solido ar scădea la 2£, iar Liquex s-ar scumpi la 7£ cutia, atunci sumele de plată pentru combinațiile din colțuri A (0, 40), B (48, 8), C (88, 0) ar fi 280£, 152£, respectiv 176£.

La aceste prețuri, cea mai bună achiziție pentru Tanya ar fi 48 de pachete de Solido și 8 cutii de Liquex, la prețul total de 152£.

ISTORIC

În 1947, matematicianul american George Dantzig, care lucra pe atunci pentru US Air Force, a formulat o metodă pentru rezolvarea problemelor de programare liniară numită metoda simplex. Succesul a fost atât de mare, încât Dantzig a ajuns cunoscut în Occident drept părintele programării liniare. În Rusia sovietică, izolată în timpul Războiului Rece, Leonid Kantorovici a formulat independent o teorie a programării liniare. În 1975, Kantorovici și matematicianul olandez Tjalling Koopmans au primit Premiul Nobel pentru economie, pentru cercetările lor privind alocarea resurselor, care includeau și tehnici de programare liniară.

Tanya a luat în considerare doar două produse – două variabile –, dar problemele care implică mii de variabile sunt ceva obișnuit în zilele noastre. Când Dantzig și-a descoperit metoda existau foarte puține computere, dar exista Proiectul Tabelelor Matematice – o schemă de creare de locuri de muncă începută la New York, în 1938. A fost nevoie de o echipă de zece oameni, care au lucrat timp de 12 zile cu calculatoare de buzunar, ca să rezolve o problemă a dietei cu nouă cerințe privind „vitaminele" și 77 de variabile.

Cu tot succesul extraordinar al metodei simplex și al variantelor sale, au fost încercate și alte metode. În 1984, matematicianul indian Narendra Karmarkar a dedus un nou algoritm cu importanță practică, iar rusul Leonid Hacijan a propus unul de semnificație capitală în plan teoretic.

Modelul elementar de programare liniară a fost aplicat în multe alte situații, nu doar pentru stabilirea unei diete. Un tip de problemă, problema transportului, se preocupă de transportul de produse de la fabrici spre depozite. Are o structură specială și a devenit un domeniu în sine. Obiectivul în acest caz este minimizarea costului de transport. În unele probleme de programare liniară, obiectivul poate fi a maximiza (cum ar fi maximizarea profiturilor). În alte probleme, variabilele pot lua doar valori numere întregi sau doar două valori, 0 sau 1, dar aceste probleme sunt destul de diferite și necesită propriile metode de rezolvare.

Rămâne de văzut dacă Tanya Smith își va câștiga medalia de aur la Jocurile Olimpice. Dacă da, va fi un alt triumf pentru programarea liniară.

Idee de bază
sănătos cu orice preț

46 Comis-voiajorul

James Cook, cu biroul în Bismarck (Dakota de Nord, SUA) este un excelent agent de vânzări al companiei Electra, care fabrică aspiratoare. El a câștigat de trei ori la rând titlul de agentul de vânzări al anului, fapt care îi dovedește abilitatea. Zona lui de vânzări include orașele Albuquerque, Chicago, Dallas și El Paso, iar el le vizitează pe fiecare într-o călătorie circulară, o dată pe lună. Întrebarea pe care și-o pune este cum să facă această călătorie și, în același timp, să minimizeze numărul total de kilometri parcurși. Este problema clasică a comis-voiajorului.

James a alcătuit un tabel care arată distanțele dintre orașe. De exemplu, distanța dintre Bismarck și Dallas este de 1020 km, găsită la intersecția dintre coloana Bismarck și linia Dallas.

METODA LACOMULUI

Cum este un om practic, James Cook a schițat o hartă a zonei de vânzări, fără să-și facă griji privind acuratețea, atât timp cât îi spune cam pe unde se află orașele și ce distanțe sunt între ele. O rută pe care o urmează frecvent începe din Bismarck, trece prin Chicago, Albuquerque, Dallas și El Paso, după care se întoarce în Bismarck. Aceasta este ruta BCADEB, dar el își dă seama că această călătorie, lungă de 4 119 km, este scumpă în termenii distanței parcurse. Se poate descurca mai bine?

Albuquerque				
883	Bismarck			
1138	706	Chicago		
580	1020	785	Dallas	
236	1100	1256	589	El Paso

Faptul că face un plan al zonei de vânzări nu poate masca faptul că James nu este omul planificării detaliate – el vrea doar să ajungă într-un loc și să vândă. Uitându-se pe o hartă, în biroul lui din Bismarck, vede că orașul cel mai apropiat este Chicago. Se află la 706 km distanță, comparativ cu cei 883 km până la Albuquerque, 1 020 până la Dallas și 1 100 km până la El Paso. Așa că pleacă imediat la Chicago, înainte să își facă un plan

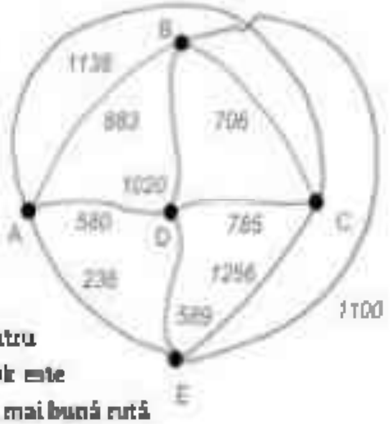
CRONOLOGIE

cca 1810 d.Hr.
Charles Babbage menționează problema ca fiind una interesantă.

1831
Problema comis-voiajorului apare ca o problemă practică.

1926
Borůvka prezintă algoritmul lacomului.

general. După ce ajunge la Chicago și își termină treburile, se uită iarăși după cel mai apropiat oraș. Alege Dallas, și nu Albuquerque sau El Paso, pentru că se află la 785 km de Chicago și este mai apropiat decât celelalte.



Odată ajuns la Dallas, a parcurs 706 + 785 km. Apoi are de ales între Albuquerque și El Paso. Alege Albuquerque pentru că este mai aproape. De la Albuquerque trebuie să meargă la El Paso, moment în care a trecut prin toate orașele și, odată treaba terminată, se întoarce la Bismarck. Distanța totală parcursă este 706 + 785 + 580 + 236 + 1 100 = 3 407 km. Această rută BCDAEB este mult mai scurtă decât precedenta și a redus mult și emisiile de carbon.

Acest mod de gândire este deseori numit metoda lacomului pentru găsirea rutei mai scurte. Aceasta deoarece decizia lui James Cook este întotdeauna una locală – el se află într-un anumit oraș și caută cea mai bună rută ca să plece de acolo. Cu această metodă, el nu încearcă niciodată să planifice mai mult decât următoarea etapă. Faptul că a terminat în El Paso înseamnă că a fost nevoit să parcurgă un drum mai lung ca să se întoarcă la Bismarck. A găsit, așadar, o rută mai scurtă, dar care este cea mai scurtă? James devine interesat.

James își dă seama cum poate profita de faptul că sunt implicate doar cinci orașe. Cu atât de puține, se poate face o listă a tuturor rutelor și apoi să fie aleasă cea mai scurtă. Pentru cinci orașe, sunt doar 24 de rute de examinat, sau doar 12, în cazul în care considerăm o rută și inversa ei ca fiind echivalente. Aceasta este posibil pentru că ambele au același număr total de kilometri. Metoda i-a fost foarte utilă lui James Cook, care află că ruta BAEDCB (sau inversa ei, BCDEAB) este de fapt cea mai bună, cu doar 3 194 km lungime.

Odată întors în Bismarck, James își dă seama că voiajul lui a durat prea mult. Îl interesează nu să facă economie la distanță, ci la timp. Așa că schițează un nou tabel, care dă duratele călătoriei între diferite orașe din teritoriul lui.

Albuquerque				
12 (rutier)	Bismarck			
6 (aerian)	2 (aerian)	Chicago		
2 (aerian)	4 (aerian)	3 (aerian)	Dallas	
4 (rutier)	3 (aerian)	5 (aerian)	1 (aerian)	El Paso

1954

Dantzig și Dijkstra propun metode pentru abordarea problemei comis-voiajorului.

1971

Cook formulează conceptul P versus NP pentru algoritmi.

2004

David Applegate rezolvă problema pentru toate cele 24 978 de orașe din Suedia.

Când problema se concentra pe numărul de kilometri, James știa că suma distanțelor parcurse pe două laturi ale triunghiului este întotdeauna mai mare decât lungimea celei de-a treia laturi; în acest caz, graful se numește euclidian și se știu multe despre metodele de rezolvare. Acesta nu este și cazul când problema este una de timp. Zborul cu avionul pe rutele principale este, de obicei, mai rapid decât pe rutele secundare, iar James Cook observă că este mai rapid să mergi de la El Paso la Chicago cu avionul via Dallas. Așa-numita inegalitate a triunghiului nu se mai aplică.

Metoda lacomului aplicată la problema de timp produce o durată totală de 22 de ore pe ruta BCDEAB și există două rute optime distincte, BCADEB și BCDAEB, care totalizează 14 ore fiecare. Dintre aceste două rute, prima are 4 113 km, iar a doua 3 407 km. James Cook este mulțumit că, alegând BCDAEB, a economisit cel mai mult. Ca proiect viitor, el va lua în considerare ruta cu cel mai mic cost.

DE LA SECUNDE LA SECOLE

Adevărata problemă asociată cu problema comis-voiajorului apare atunci când numărul de orașe este mare. Deoarece James Cook este un angajat strălucit, nu trece mult timp până când este promovat în funcția de supervizor. Acum trebuie să viziteze 13 orașe plecând din Bismarck, nu doar pe cele patru de dinainte. Metoda lacomului nu îl mulțumește și preferă să studieze o listă completă a rutelor. Se apucă să traseze toate rutele posibile pentru cele 13 orașe ale lui. El descoperă repede că ar avea $3{,}1 \times 10^9$ rute de analizat. Altfel spus, dacă un computer ar printa câte o rută la fiecare secundă, ar avea nevoie de aproape un secol ca să le tipărească pe toate. O problemă cu 100 de orașe i-ar lua computerului un timp de ordinul mileniilor.

Problemei comis-voiajorului i s-au aplicat și unele metode sofisticate. S-au găsit metode exacte care se aplică unui număr de 5 000 de orașe sau mai mic, iar una a tratat cu succes problema unui număr particular de 33 810 orașe, deși, în acest caz, a fost nevoie de o putere de computer colosală. Metodele inexacte generează rute care se abat de la cea optimă cu o probabilitate specificată. Metodele de acest tip au avantajul că sunt capabile să abordeze probleme cu milioane de orașe.

COMPLEXITATE COMPUTAȚIONALĂ

Dacă ne uităm la problemă din punctul de vedere al unui computer, să ne gândim doar la cât timp i-ar lua ca să găsească o soluție. Simpla enumerare a tuturor rutelor posibile este cea mai proastă variantă. James a descoperit că această metodă a forței brute ar avea nevoie de aproape un secol pentru cazul problemei cu 13 orașe. Dacă mai adăugăm două orașe la listă, durata ar depăși 20 000 de ani!

Bineînțeles că estimările acestea depind de computerul folosit în practică, dar pentru *n* orașe durata crește proporțional cu *n* factorial (numărul obținut prin

înmulțirea tuturor numerelor naturale de la 1 la *n*). Am calculat $3{,}1 \times 10^9$ rute pentru 13 orașe. Ca să decidem care rută este cea mai scurtă dintre cele găsite devine o problemă de timp factorial — și va lua un timp foarte lung.

Există și alte metode de abordare a problemei, în care timpul pentru *n* orașe crește cu 2^n (2 înmulțit cu el însuși de *n* ori), așadar pentru 13 orașe aceasta ar implica 8 192 de decizii (de 8 ori mai multe decât pentru 10 orașe). O metodă de o asemenea complexitate se numește algoritm în timp exponențial. Sfântul Graal al acestor „probleme combinatorice de optimizare" constă în găsirea unui algoritm care nu depinde de a *n*-a putere a lui 2, ci de o putere fixă a lui *n*. Cu cât mai mică este puterea, cu atât mai bine; de exemplu, dacă algoritmul variază după n^2 atunci, în cazul problemei cu 13 orașe, aceasta s-ar ridica la doar 169 de decizii – mai puțin de jumătate din timpul necesar pentru 10 orașe. Despre o metodă de această „complexitate" se spune că este derulată în timp polinomial – problemele rezolvate în acest mod sunt „probleme rapide" și pot dura 3 minute, nu câteva secole.

Clasa problemelor care pot fi rezolvate de un computer în timp polinomial este notată cu *P*. Nu știm dacă problema comis-voiajorului este una dintre acestea. Nu a venit nimeni cu un algoritm în timp polinomial pentru ea, dar nici nu a putut demonstra cineva că nu există vreunul.

O clasă mai largă, notată cu *NP*, constă din problemele ale căror soluții pot fi *verificate* în timp polinomial. Problema comis-voiajorului este categoric una dintre ele, deoarece este posibil să se verifice în timp polinomial dacă o rută dată este mai scurtă decât orice distanță. Este suficient să aduni distanțele de pe ruta dată și să le compari cu un număr dat. *Găsirea* și *verificarea* sunt două operațiuni diferite: de exemplu, este ușor să verifici că 167 × 241 = 40 247, dar să găsești factorii lui 40 247 este cu totul altceva.

Dacă o problemă, oricare ar fi ea, este verificabilă în timp polinomial, atunci este și rezolvabilă în timp polinomial? Dacă ar fi adevărat, atunci cele două clase *P* și *NP* ar fi identice și am putea scrie *P* = *NP*. Dacă *P* = *NP* este întrebarea arzătoare a zilei pentru specialiștii în computere. Mai mult de jumătate dintre ei cred că acest lucru nu este adevărat: ei cred că există probleme care pot fi verificate în timp polinomial, dar nu pot fi rezolvate în timp polinomial. Este o problemă atât de importantă încât Institutul Clay de Matematică a oferit un premiu de 1 000 000 $ oricui demonstrează dacă *P* = *NP* sau *P* ≠ *NP*.

Idee de bază
găsirea celei mai bune rute

47 Teoria jocurilor

Unii spuneau că Johnny era cea mai inteligentă persoană în viață. John von Neumann a fost un copil minune care a devenit o legendă în lumea matematicii. Când oamenii au auzit că își schițase „teorema minimax" în taxiul cu care a venit la o întâlnire, au dat din cap aprobator. Era exact genul de lucruri pe care le făcea von Neumann. El a adus contribuții în mecanica cuantică, logică, algebră, așadar de ce ar fi scăpat din vedere teoria jocurilor? Și nu i-a scăpat – împreună cu Oskar Morgenstern, a scris cunoscuta carte *Teoria jocurilor și comportamentul economic*. În sensul ei cel mai larg, teoria jocurilor este un subiect străvechi, dar von Neumann a fost personajul-cheie care a pus la punct teoria jocului „cu doi jucători și sumă zero".

JOCURILE CU DOI JUCĂTORI ȘI SUMĂ ZERO

Sună complicat, dar un joc cu doi jucători și sumă zero este, pur și simplu, unul jucat de doi oameni, două companii sau două echipe, în care una din părți câștigă ceea ce pierde cealaltă. Dacă A câștigă 200£, atunci B pierde 200£, asta înseamnă sumă zero. Nu are nici un rost ca A să coopereze cu B – este competiție pură, în care există doar câștigători și învinși. În limbaj „win-win", A câștigă 200£ și B câștigă – 200£, iar suma este 200 + (–200) = 0. Aceasta este originea termenului de „sumă zero".

Să ne imaginăm că două companii TV, ATV și BTV, licitează ca să opereze un serviciu suplimentar de știri fie în Scoția, fie în Anglia. Fiecare companie poate licita doar pentru o singură țară și își fundamentează decizia pe creșterea planificată a numărului de telespectatori. Analiștii pieței media au estimat creșteri de audiență și ambele companii au acces la rezultatele cercetării lor. Acestea sunt așezate foarte convenabil într-un tabel și măsurate în unități de un milion de telespectatori.

Dacă și ATV, și BTV decid să opereze în Scoția, atunci ATV va câștiga 5 milioane de telespectatori, dar BTV va pierde 5 milioane de telespectatori. Semnificația semnului minus, ca în celula –3, înseamnă că ATV va pierde o audiență de 3 milioane. Rezultatele cu + sunt bune pentru ATV, iar cele cu – sunt bune pentru BTV.

CRONOLOGIE

1713 d.Hr.	1944
Waldegrave oferă prima soluție matematică pentru un joc cu doi jucători.	Von Neumann și Morgenstern publică *Teoria jocurilor și comportamentul economic*.

Vom presupune că ambele companii iau decizii pe baza tabelului cu rezultate și că licitează simultan, cu oferte în plic închis. Evident, ambele companii acționează în interesul lor.

		BTV	
		Scoția	Anglia
ATV	Scoția	+5	-3
	Anglia	+2	+4

Dacă A alege Scoția, cel mai rău lucru care s-ar putea întâmpla ar fi o pierdere de audiență de 3 milioane, iar dacă licitează pentru Anglia, cel mai rău ar fi un câștig de 2 milioane. Strategia evidentă pentru ATV ar fi să aleagă Anglia (linia 2). Nu s-ar întâmpla nimic mai rău decât un câștig de 2 milioane de telespectatori, indiferent ce alege BTV. Abordând problema numeric, ATV calculează −3 și 2 (minimele de pe linie) și alege linia corespunzătoare maximului dintre acestea.

BTV este într-o poziție mai slabă, dar tot poate elabora o strategie care să-i limiteze pierderile potențiale și să spere într-un tabel cu rezultate mai bune anul următor. Dacă BTV alege Scoția (coloana 1), cel mai rău lucru care s-ar putea întâmpla ar fi o pierdere de 5 milioane; dacă alege Anglia, cel mai rău ar fi o pierdere de 4 milioane. Strategia cea mai sigură pentru BTV ar fi să aleagă Anglia (coloana 2), pentru că mai degrabă ar pierde o audiență de 4 milioane decât de 5 milioane. N-ar putea păți ceva mai rău decât să piardă 4 milioane de telespectatori, indiferent ce ar alege ATV.

Acestea ar fi strategiile cele mai sigure pentru fiecare jucător și, dacă ar fi urmate, ATV ar câștiga 4 milioane de telespectatori suplimentari, în timp ce BTV i-ar pierde.

CÂND ESTE UN JOC DETERMINAT?

În anul următor, cele două companii au o opțiune în plus – să opereze în Țara Galilor. Deoarece s-au schimbat circumstanțele, există un nou tabel cu rezultate posibile.

O minte sclipitoare

John F. Nash (1928 – 2015), a cărui viață tulburată a fost descrisă în filmul din 2001 *A beautiful mind* (*O minte sclipitoare*), a câștigat Premiul Nobel pentru economie în 1994 pentru contribuțiile lui la teoria jocurilor.

Nash și alții au extins teoria jocurilor la cazuri în care există mai mult de doi jucători și la jocuri în care apare cooperarea între jucători, inclusiv pentru eliminarea unui al treilea jucător. „Punctul de echilibru Nash" (ca un echilibru în joc) oferă o perspectivă mult mai largă decât cel stabilit de von Neumann, ducând la o mai bună înțelegere a situațiilor economice.

1950
Tucker propune dilema prizonierului, iar Nash propune echilibrul Nash

1982
Maynard Smith publică *Evoluția și teoria jocurilor*

1994
Nash primește Premiul Nobel pentru economie, pentru cercetările lui în teoria jocurilor

BTV

		Țara Galilor	Scoția	Anglia	minimul liniei
ATV	Țara Galilor	+3	+2	+1	+1
	Scoția	+4	-1	0	-1
	Anglia	-3	+5	-2	-3
	maximul coloanei	+4	+5	+1	

La fel ca înainte, strategia sigură pentru ATV ar fi să aleagă linia care maximizează cel mai rău lucru care s-ar putea întâmpla. Maximul dintre {+1, -1, -3} este să aleagă Țara Galilor (linia 1). Strategia sigură pentru BTV este să aleagă coloana corespunzătoare maximului dintre {+4, +5, +1}. Aceasta înseamnă Anglia (coloana 3).

Alegând Țara Galilor, ATV are garanția că va câștiga nu mai puțin de un milion de telespectatori, orice ar face BTV, și alegând Anglia (coloana 3), BTV are garanția că nu va pierde mai mult de un milion de telespectatori, indiferent ce ar face ATV. Aceste opțiuni reprezintă, așadar, cele mai bune strategii pentru fiecare companie și, din acest punct de vedere, jocul este determinat (chiar dacă este nedrept față de BTV). În acest joc,

maximul lui {+1, -1, -3} = minimul lui {+4, +5, +1}

și ambele părți ale ecuației au valoarea +1. Spre deosebire de primul joc, această versiune are un punct de echilibru „în șa", la +1.

JOCURI REPETITIVE

Cel mai cunoscut dintre jocurile repetitive este tradiționalul „hârtie, foarfecă, piatră". Spre deosebire de jocul companiilor TV, care se derulează o singură dată, acest joc este dus de câteva ori și chiar de sute de ori de participanții la campionatul mondial anual.

În „hârtie, foarfecă, piatră", doi jucători arată mâna întinsă, două degete sau pumnul strâns, simbolizând hârtia, foarfeca, respectiv piatra. Ei joacă simultan, cu o șansă de câștig din trei: hârtia este la egalitate cu hârtia, este învinsă de foarfecă (pentru că foarfeca poate tăia hârtia), dar învinge piatra (pentru că poate înfășura piatra). Dacă

	hârtie	foarfecă	piatră	minimul liniei
hârtie	egal = 0	pierdere = -1	câștig = +1	-1
foarfecă	câștig = +1	egal = 0	pierdere = -1	-1
piatră	pierdere = -1	câștig = +1	egal = 0	-1
maximul coloanei	+1	+1	+1	

joacă „hârtie", rezultatele sunt așadar 0, -1, +1, ceea ce reprezintă linia de sus în tabelul complet al rezultatelor.

Nu există punct de șa pentru acest joc și nici o strategie evidentă care poate fi adoptată. Dacă un jucător alege întotdeauna aceeași acțiune, să zicem hârtie, adversarul lui va detecta repede acesta și, pur și simplu, va alege foarfeca, astfel încât să câștige de fiecare dată. Potrivit „teoremei minimax" a lui Neumann, există o „strategie mixtă" sau o modalitate de a alege diferite acțiuni, pe bază de probabilitate.

Matematica spune că jucătorii ar trebui să aleagă la întâmplare, dar, în total, opțiunile hârtie, foarfecă, piatră să reprezinte fiecare o treime. Alegerea aleatorie „oarbă" nu este întotdeauna cea mai bună, totuși, iar campionii mondiali au modul de a-și alege strategia cu o doză de joc „psihologic". Ei sunt buni la a ghici intențiile adversarilor.

CÂND UN JOC *NU* ESTE DE SUMĂ ZERO?

Nu toate jocurile sunt de sumă zero – fiecare jucător are câteodată propriul tabel de rezultate. Un exemplu celebru este „dilema prizonierului", gândită de A.W. Tucker.

Doi bărbați, Andrew și Bertie, sunt reținuți de poliție sub bănuiala de furt și sunt închiși în celule separate, astfel încât să nu poată vorbi unul cu celălalt. Rezultatele, în acest caz, condamnări la închisoare, nu depind doar de cum răspunde fiecare la interogatoriul poliției, ci și de cum răspund împreună. Dacă A mărturisește și B nu, atunci A primește un an de închisoare (din tabelul cu rezultate al lui A), dar B este condamnat la zece ani (din tabelul cu rezultate al lui B). Dacă A nu mărturisește, dar o face B, sentințele se inversează. Dacă amândoi mărturisesc, primesc patru ani fiecare, dar dacă nici unul nu mărturisește și amândoi își susțin nevinovăția, sunt achitați!

Dacă inculpații ar putea să coopereze, ei ar adopta cursul de acțiune optim și nu ar mărturisi – aceasta ar fi o situație „win-win", în care amândoi câștigă.

A		B	
		mărturisește	nu mărturisește
A	mărturisește	+4	+1
	nu mărturisește	+10	0

B		B	
		mărturisește	nu mărturisește
A	mărturisește	+4	+10
	nu mărturisește	+1	0

Idee de bază
matematica „win-win"

48 Relativitate

Când un obiect se mişcă, mişcarea lui este măsurată relativ la alte obiecte. Dacă mergem pe autostradă cu 100 km/h şi o altă maşină merge în paralel cu noi cu 100 km/h în aceeaşi direcţie, viteza noastră relativ la cealaltă maşină este zero. Şi, totuşi, amândouă maşinile se deplasează cu 100 km/h faţă de sol. Iar viteza noastră este 200 km/h relativ la o maşină care merge cu 100 km/h în sensul opus. Teoria relativităţii a schimbat acest mod de gândire.

Bazele teoriei relativităţii au fost puse la sfârşitul secolului al XIX-lea de fizicianul olandez Hendrik Lorentz, dar pasul definitiv a fost făcut de Albert Einstein în 1905. Celebra lucrare a lui Einstein despre relativitatea specială a revoluţionat studiul modului în care se mişcă obiectele, reducând teoria clasică a lui Newton, o realizare magnifică la vremea ei, la un caz particular.

Întoarcerea la Galileo

Ca să descriem teoria relativităţii, ne vom inspira de la maestru însuşi: lui Einstein îi plăcea să vorbească despre trenuri şi experimente mentale. În exemplul nostru, Jim Diamond se află într-un tren care merge cu 60 km/h. Se ridică de la locul lui din spatele trenului şi merge spre vagonul-restaurant cu 2 km/h. Viteza lui faţă de pământ este de 62 km/h. Când se întoarce la locul lui, viteza lui Jim faţă de pământ va fi de 58 km/h, pentru că merge în direcţie opusă celei în care se deplasează trenul. Asta este ceea ce ne spune teoria lui Newton. Viteza este un concept relativ şi direcţia de mişcare a lui Jim determină dacă adunăm sau scădem.

Deoarece toate mişcările sunt relative, vorbim despre un „sistem de referinţă" ca fiind punctul de vedere din care este măsurată o anumită mişcare. În ceea ce priveşte mişcarea unidimensională a unui tren de-a lungul unei şine fixe, ne putem gândi la un sistem de referinţă fix, poziţionat într-o gară, la distanţa x şi la un timp t. Poziţia zero este determinată de un punct marcat pe peron, iar timpul este citit la ceasul din gară. Coordonatele distanţă/timp relativ la acest sistem de referinţă din gară sunt (x, t).

CRONOLOGIE

cca 1632 d.Hr. Galileo enunţă „transformările galileene" pentru corpurile în cădere liberă.

1676 Rømer calculează viteza luminii din observaţiile asupra lunilor lui Jupiter.

1687 Principia a lui Newton descrie legile clasice ale mişcării.

Există un sistem de referință și la bordul trenului. Dacă măsurăm distanța de la capătul trenului, iar timpul cu ceasul de la mâna lui Jim, vom avea un alt set de coordonate, (x', t'). Este posibil, de asemenea, să sincronizăm aceste două sisteme de coordonate. Când trenul trece prin dreptul semnului de pe peron, atunci $x = 0$ și ceasul gării indică $t = 0$. Dacă Jim stabilește $x' = 0$ în acest punct și potrivește $t' = 0$ la ceasul de la mână, există o legătură între aceste coordonate.

Când trenul trece prin stație, Jim pornește spre vagonul-restaurant. Putem calcula cât de departe este de stație după cinci minute. Știm că trenul se deplasează cu 1 km într-un minut, așa că în timpul acesta a parcurs 5 km, iar Jim a mers $x' = {}^{10}/_{60}$ km (de la viteza lui de 2 km/h înmulțită cu timpul ${}^{5}/_{60}$). Deci, în total, Jim se află la o distanță (x) de $5\,{}^{10}/_{60}$ km față de gară. Relația dintre x și x' este dată, așadar, de $x = x' + v \times t$ (aici $v = 60$). Răsturnând ecuația ca să aflăm distanța pe care s-a deplasat Jim relativ la sistemul de referință al trenului, obținem

$$x' = x - v \times t$$

Conceptul de timp în teoria newtoniană clasică este o curgere unidimensională din trecut spre viitor. Este universal pentru toți și este independent de spațiu. Cum este vorba despre o cantitate absolută, timpul lui Jim de la bordul trenului este același cu timpul de pe peronul gării, t, așadar

$$t' = t$$

Aceste două formule pentru x' și t', deduse pentru prima dată de Galileo, sunt tipuri de ecuații numite transformări, deoarece transformă cantitățile dintr-un sistem de referință în altul. Potrivit teoriei clasice a lui Newton, ar fi de așteptat ca viteza luminii să asculte de aceste două transformări galileene pentru x' și t'.

În secolul al XVII-lea, oamenii știau deja că lumina are o viteză, iar valoarea aproximativă a acesteia a fost măsurată, în 1676, de către astronomul danez Ole Rømer. Când Albert Michelson a măsurat viteza luminii cu acuratețe mai mare, în 1881, el a găsit că era de 300 000 km/s. Mai mult, el și-a dat seama că propagarea luminii era foarte diferită de propagarea sunetului. Michelson a descoperit că, spre deosebire de viteza observatorului nostru dintr-un tren în mișcare, direcția luminii nu avea nici o influență asupra vitezei luminii. Acest rezultat paradoxal trebuia să fie explicat.

1881 Michelson măsoară viteza luminii cu mare acuratețe

1887 Transformările Lorentz sunt puse pentru prima dată pe hârtie

1905 Einstein publică *Asupra electrodinamicii corpurilor în mișcare*, lucrarea care descrie relativitatea restrânsă

1915 Einstein publică *Ecuațiile de câmp pentru gravitație*, în care descrie teoria relativității generalizate

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

TEORIA RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE

Lorentz a enunțat ecuațiile matematice care guvernează legătura dintre distanță și timp atunci când unul dintre sistemele de referință se deplasează cu viteza constantă v relativ la celălalt. Aceste transformări sunt foarte asemănătoare celor pe care le-am calculat deja, dar implică [redacted]

EINSTEIN VS NEWTON

Pentru observaţiile asupra unor trenuri care se mişcă lent, există doar o diferenţă foarte mică între teoria relativităţii a lui Einstein şi teoria newtoniană clasică. În astfel de situaţii, viteza v este atât de mică în comparaţie cu viteza luminii c, încât valoarea factorului Lorentz γ este aproape 1. În acest caz, ecuaţiile lui Lorentz sunt practic [redacted]

49 Ultima teoremă a lui Fermat

Putem aduna două numere la puterea a doua ca să obținem un al treilea număr la pătrat. De exemplu, $5^2 + 12^2 = 13^2$. Dar putem aduna două numere la puterea a treia ca să obținem un alt număr la puterea a treia? Dar pentru puteri mai mari? Interesant este că nu putem. Ultima teoremă a lui Fermat spune că, pentru oricare patru numere întregi x, y, z și n, nu există soluții ale ecuației $x^n + y^n = z^n$ când n este mai mare decât 2. Fermat pretindea că a găsit „o demonstrație minunată", punând la încercare generațiile de matematicieni care l-au urmat, inclusiv pe un băiat de zece ani care a citit într-o zi, la biblioteca locală, despre această vânătoare de comori matematice.

Ultima teoremă a lui Fermat se referă la o ecuație diofantică, genul de ecuație care ridică cele mai dificile provocări. Aceste ecuații cer ca soluțiile lor să fie numere întregi. Ele sunt numite după Diophantus din Alexandria, a cărui *Arithmetica* a devenit un reper în teoria numerelor. Pierre de Fermat a fost avocat și funcționar guvernamental la Toulouse, în Franța secolului al XVII-lea. Matematician multilateral, el s-a bucurat de o reputație excelentă în teoria numerelor și este amintit, în special, pentru enunțarea ultimei teoreme, contribuția lui finală la matematică. Fermat a demonstrat-o, sau a crezut că a făcut-o, și a notat pe exemplarul lui din *Arithmetica* lui Diophantus: „Am găsit o demonstrație cu adevărat minunată, dar marginea asta de foaie este prea mică să o scriu aici".

Fermat a rezolvat multe probleme importante, dar se pare că ultima teoremă care îi poartă numele nu s-a numărat printre acestea. Teorema a dat de lucru unor armate întregi de matematicieni în ultimii 300 de ani și a fost demonstrată abia recent. Această demonstrație nu poate fi scrisă pe nicio margine de foaie, iar tehnicile moderne folosite pentru generarea ei aruncă o umbră serioasă de îndoială asupra afirmației lui Fermat.

CRONOLOGIE

1665 d.Hr.	1753	1825	1839
Fermat moare, fără să lase ceva scris despre „minunata demonstrație".	Euler demonstrează teorema pentru n = 3.	Legendre și Dirichlet demonstrează independent teorema pentru n = 5.	Lamé face demonstrația pentru n = 7.

ECUAȚIA $x + y = z$

Cum am putea să rezolvăm această ecuație cu trei variabile, x, y și z? Într-o ecuație avem, de obicei, o singură necunoscută x, dar aici avem trei. De fapt, tocmai acest lucru face ecuația $x + y = z$ destul de ușor de rezolvat. Putem alege cum vrem noi valorile lui x și y, le adunăm ca să îl obținem pe z, iar aceste trei valori reprezintă soluția. Atât și nimic mai mult.

De exemplu, dacă alegem $x = 3$ și $y = 7$, valorile $x = 3$, $y = 7$ și $z = 10$ reprezintă o soluție a ecuației. Putem vedea, de asemenea, că unele valori x, y, z nu sunt soluții ale ecuației. De exemplu, $x = 3$, $y = 7$ și $z = 9$ nu sunt o soluție, deoarece partea stângă a ecuației și cea dreaptă ar avea valori diferite.

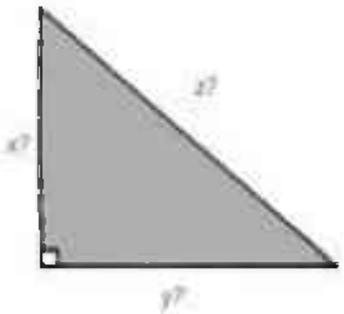
ECUAȚIA $x^2 + y^2 = z^2$

Să ne gândim acum la pătrate. Pătratul unui număr este acel număr înmulțit cu el însuși, număr pe care îl scriem x^2. Dacă $x = 3$, atunci $x^2 = 3 \times 3 = 9$. Ecuația la care ne gândim acum este $x + y = z$, dar

$$x^2 + y^2 = z^2$$

O putem rezolva ca mai înainte, alegând valori pentru x și y și calculând z? Cu valorile $x = 3$ și $y = 7$, de exemplu, partea stângă a ecuației devine $3^2 + 7^2$, adică $9 + 49 = 58$. Pentru aceasta, z ar trebui să fie rădăcina pătrată a lui 58 ($z = \sqrt{58}$), care este aproximativ 7,6158. Avem tot dreptul să susținem că $x = 3$, $y = 7$ și $z = \sqrt{58}$ reprezintă o soluție pentru $x^2 + y^2 = z^2$, însă, din nefericire, principala condiție a ecuațiilor diofantice este ca soluțiile să fie compuse din numere întregi. Cum $\sqrt{58}$ nu este număr întreg, $x = 3$, $y = 7$ și $z = \sqrt{58}$ nu reprezintă o soluție.

Ecuația $x^2 + y^2 = z^2$ are legătură cu triunghiurile. Dacă x, y și z sunt lungimile celor trei laturi ale unui triunghi dreptunghic, ele satisfac această ecuație. Invers, dacă x, y și z satisfac ecuația, atunci unghiul dintre laturile de lungime x și y este drept. Datorită conexiunilor cu teorema lui Pitagora, soluțiile pentru x, y și z sunt numite triplete pitagoreice.



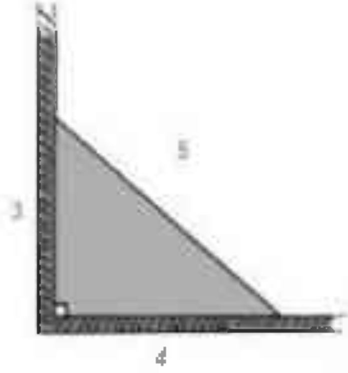
Cum putem găsi triplete pitagoreice? Aici ne vine în ajutor meșterul zidar. Parte a echipamentului zidarului este și omniprezentul echer 3 – 4 – 5.

1843 Kummer susține că a demonstrat teorema, dar Dirichlet găsește o eroare.

1907 Von Lindemann susține și el că a găsit o demonstrație, dar se arată că se înșală.

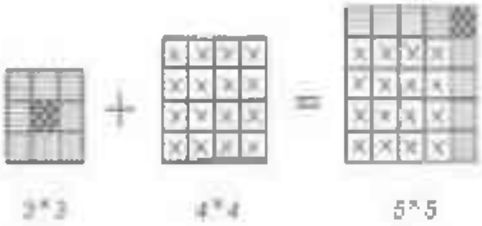
1908 Wolfskehl oferă un premiu pentru soluțiile din următorii 100 de ani.

1994 Wiles demonstrează, în cele din urmă, teorema



Valorile $x = 3$, $y = 4$ şi $z = 5$ se dovedesc a fi o soluţie de genul celor pe care le căutăm, deoarece $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. Reciproca ne arată că un triunghi cu laturile 3, 4 şi 5 trebuie să aibă un unghi drept. Acesta este faptul matematic pe care se bazează zidarul, ca să-şi construiască zidurile cu unghiuri drepte.

În acest caz, putem desface un pătrat 3×3 şi să îl înfăşurăm în jurul unui pătrat 4×4 ca să obţinem un pătrat 5×5.



Există şi alte soluţii numere întregi pentru $x^2 + y^2 = z^2$. De exemplu, $x = 5$, $y = 12$ şi $z = 13$ reprezintă o altă soluţie, deoarece $5^2 + 12^2 = 13^2$ De fapt, există un număr infinit de soluţii ale ecuaţiei. Soluţia zidarului, $x = 3$, $y = 4$ şi $z = 5$ deţine locul de onoare deoarece este cea mai mică dintre soluţii şi, în plus, este singura formată din numere întregi consecutive. Există multe soluţii în care două dintre numere sunt consecutive, de exemplu $x = 20$, $y = 21$ şi $z = 29$ la fel ca $x = 9$, $y = 40$ şi $z = 41$, dar nici o alta cu toate trei.

DE LA OSPĂŢ LA FOAMETE

Pare un pas mic să trecem de la $x^2 + y^2 = z^2$ la $x^3 + y^3 = z^3$. Aşadar, pornind de la ideea desfacerii unui pătrat şi înfăşurării lui în jurul altuia, ca să obţinem un al treilea pătrat, am putea face acelaşi lucru şi cu un cub? Putem reasambla un cub în jurul altuia ca să construim un al treilea cub? Se dovedeşte că nu putem face asta. Ecuaţia $x^2 + y^2 = z^2$ are un număr infinit de soluţii diferite, dar Fermat nu a reuşit să găsească nici măcar un singur exemplu de numere întregi care să satisfacă ecuaţia $x^3 + y^3 = z^3$. Răul abia începea, deoarece absenţa rezultatelor lui Euler l-a făcut pe Fermat să enunţe ultima teoremă:

Nu există o soluţie în numere întregi a ecuaţiei $x^n + y^n = z^n$ pentru toate valorile lui n mai mari decât 2.

O modalitate de a aborda problema demonstrării acesteia ar fi să începem de la valorile mici ale lui n şi să mergem înainte. Aşa s-a apucat de lucru şi Fermat. Cazul $n = 4$ este, de fapt, mai simplu decât $n = 3$ şi este foarte probabil ca Fermat să fi reuşit o demonstraţie în cazul acesta. În secolele al XVIII-lea şi al XIX-lea, Euler a completat demonstraţia cu cazul $n = 3$, Adrien-Marie Legendre a continuat cu $n = 5$, iar Gabriel Lamé a făcut demonstraţia pentru cazul $n = 7$. Lamé a crezut iniţial că a reuşit o demonstraţie a teoremei generale, însă, din păcate, s-a înşelat.

Ernst Kummer a adus o contribuţie importantă şi, în 1843, a prezentat un manuscris, susţinând că a demonstrat teorema în general, însă Dirichlet a indicat o eroare în argumentaţie. Academia Franceză de Ştiinţe a oferit un premiu de 3 000 de franci pentru o demonstraţie validă, sfârşind prin a i-l decerna lui Kummer, pentru tentativa

lui meritorie. Kummer a demonstrat teorema pentru toate numerele prime mai mici de 100 (și alte valori), mai puțin numerele prime 37, 59 și 67. De exemplu, el nu a putut dovedi că nu există numere întregi care să satisfacă ecuația $x^{37} + y^{37} = z^{37}$. El nu a reușit să demonstreze teorema generală, dar tehnicile lui au deschis drumuri noi în algebra abstractă. Aceasta a fost poate o contribuție mai importantă pentru matematică decât rezolvarea problemei în sine.

Ferdinand von Lindemann, care a demonstrat și cuadratura cercului (vezi p. 22) a susținut că a demonstrat teorema în 1907, dar s-a dovedit că se înșela. În 1908, Paul Wolfskehl a promis un premiu de 100 000 de mărci celui care avea să reușească o demonstrație, competiția urmând să rămână deschisă pentru următorii 100 de ani. De-a lungul vremii au fost înaintate în jur de 5 000 de demonstrații, care au fost examinate și apoi respinse toate ca fiind false.

DEMONSTRAȚIA

Chiar dacă legătura cu teorema lui Pitagora este valabilă doar pentru $n = 2$, legătura cu geometria s-a dovedit a fi cheia pentru o demonstrație reușită. Legătura a fost făcută cu teoria curbelor și cu o conjectură avansată de doi matematicieni japonezi, Yutaka Taniyama și Goro Shimura. În 1993, Andrew Wiles a susținut la Cambridge o prelegere referitoare la această teorie și a inclus varianta lui de demonstrație a teoremei lui Fermat. Din nefericire, demonstrația era greșită.

Matematicianul francez André Weil a respins asemenea tentative. El a comparat demonstrarea teoremei cu escaladarea Everestului și a adăugat că, dacă un om se prăbușește la câțiva pași sub vârf, nu înseamnă că a urcat muntele. Presiunea era tot mai mare. Wiles s-a rupt de orice alte treburi și a lucrat la problemă fără încetare. Mulți au crezut că Wiles va sfârși, la rândul lui, în tagma celor care „aproape" că au ajuns pe vârf.

Cu ajutorul colegilor, însă, Wiles a reușit să elimine eroarea și să-i substituie o argumentație corectă. De data aceasta, i-a convins pe experți că a demonstrat teorema. Demonstrația lui a fost publicată în 1995, iar el a revendicat premiul Wolfskehl cu puțin înainte de sfârșitul perioadei de calificare, devenind o celebritate a lumii matematice. Băiatul de zece ani care citea pe vremuri despre problemă în biblioteca publică din Cambridge ajunsese departe.

Idee de bază
demonstrarea unei probleme minore

50 Ipoteza Riemann

Ipoteza Riemann este una dintre cele mai dure provocări din matematica pură. Conjectura Poincaré și ultima teoremă a lui Fermat au fost rezolvate, nu însă și ipoteza Riemann. Odată chestiunea tranșată într-un fel sau altul, își vor găsi răspuns multe întrebări evazive privind distribuția numerelor prime și vor apărea alte întrebări, să le dea bătăi de cap matematicienilor.

Povestea începe cu adunarea fracțiilor de genul

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

Răspunsul este $^{11}/_{6}$, aproximativ 1,83. Dar ce se întâmplă în cazul în care continuăm să adunăm fracții din ce în ce mai mici, să spunem până la 10?

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

Folosind doar un calculator de buzunar, suma acestor fracții este aproximativ 2,9. Un tabel arată cum crește totalul, pe măsură ce sunt adăugați din ce în ce mai mulți termeni.

număr de termeni	total (aproximativ)
1	1
10	2,9
100	5,2
1 000	7,5
10 000	9,8
100 000	12,1
1 000 000	14,4
1 000 000 000	21,3

Seria de numere

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

se numește serie armonică. Termenul armonic are originea la pitagoreici, care credeau că o coardă muzicală împărțită la jumătate, la o treime, la un sfert dă notele muzicale esențiale pentru armonie.

CRONOLOGIE

1854 d.Hr. Riemann începe lucrul la funcția zeta.

1859 Riemann demonstrează că soluțiile-cheie se află într-o fâșie critică și își prezintă conjectura.

1896 De la Vallé-Poussin și Hadamard arată că toate zerourile importante se află în interiorul fâșiei critice a lui Riemann

În seria armonică se adaugă fracții din ce în ce mai mici, dar ce se întâmplă cu totalul? Crește dincolo de toate numerele sau există undeva o barieră, o limită deasupra căreia nu urcă niciodată? Ca să răspundem la această întrebare, șmecheria este să grupăm termenii, dublând grupurile pe măsură ce avansăm. Dacă adunăm primii opt termeni (recunoscând că $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$), de exemplu

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

(unde *S* înseamnă sumă) și, deoarece $^1/_3$ este mai mare decât $^1/_4$ și $^1/_5$ este mai mare decât $^1/_8$ (și așa mai departe), aceasta este mai mare decât

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Astfel, putem spune

$$S_8 > 1 + 3 \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

și, mai general,

$$S_n > 1 + \frac{k}{2}$$

Dacă $k = 20$, astfel încât $n = 2^{20} = 1\,048\,576$ (mai mult de un milion de termeni), suma seriei abia dacă depășește 11 (vezi tabel). Este o creștere chinuitor de lentă – dar se poate alege o valoare a lui *k* astfel încât suma seriei să treacă de orice număr prestabilit, fie el cât de mare. Se spune că seria diverge la infinit. Prin contrast, acest lucru nu se întâmplă cu seria termenilor ridicați la pătrat

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

Folosim același proces: adunăm numere din ce în ce mai mici, dar, de data aceasta, există o limită, iar limita aceasta este mai mică decât 2. Destul de dramatic, seria converge la $^{\pi^2}/_6 = 1{,}64493\ \dots$

În această ultimă serie, puterea termenilor este 2. În seriile armonice, puterea numitorilor este, tacit, egală cu 1, iar această valoare este critică. Dacă puterea crește cu o cantitate minusculă, la un număr cu puțin deasupra lui 1, seria este

1900
Hilbert plasează ipoteza în lista lui de probleme-cheie pe care matematicienii le au de rezolvat.

1914
Hardy demonstrează că există o infinitate de soluții de-a lungul liniei Riemann.

2004
Primele 10 trilioane de zerouri sunt verificate dacă se află pe linia critică.

convergentă, dar dacă puterea scade cât de puțin sub 1, seria devine divergentă. Seriile armonice se află la granița dintre convergență și divergență.

FUNCȚIA ZETA RIEMANN

Faimoasa funcție zeta a lui Riemann $\zeta(s)$ îi era, de fapt, cunoscută lui Euler, în secolul al XVIII-lea, dar Bernhard Riemann a fost cel care i-a înțeles importanța. ζ este litera grecească zeta, iar funcția este scrisă ca:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \dots$$

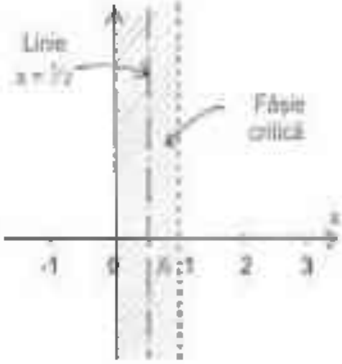
Au fost calculate diferite valori ale funcției zeta, în primul rând $\zeta(1) = \infty$, deoarece $\zeta(1)$ este seria armonică. Valoarea lui $\zeta(2)$ este $\pi^2/6$, rezultat descoperit de Euler. S-a arătat că în toate valorile lui $\zeta(s)$ apare π atunci când s este număr par, în timp ce teoria lui $\zeta(s)$ pentru s impar este mult mai dificilă. Roger Apéry a demonstrat rezultatul important că $\zeta(3)$ este un număr irațional, dar metoda lui nu se extinde și la $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ ș.a.m.d.

IPOTEZA RIEMANN

Variabila s din funcția zeta Riemann reprezintă o variabilă reală, dar ea poate fi extinsă să reprezinte un număr complex (vezi p. 32). Aceasta permite să i se aplice tehnicile foarte puternice din analiza complexă.

Funcția zeta Riemann are o infinitate de zerouri, adică o infinitate de valori ale lui s pentru care $\zeta(s) = 0$. Într-o lucrare prezentată la Academia de Științe din Berlin, în 1859, Riemann a arătat că toate zerourile importante erau numere complexe care se află în fâșia critică mărginită de $x = 0$ și $x = 1$. El a lansat totodată și celebra lui ipoteză:

Toate zerourile funcției zeta Riemann $\zeta(s)$ se află pe linia $x = 1/2$, linie aflată pe mijlocul fâșiei critice.



Primul pas real spre rezolvarea acestei ipoteze a fost făcut în 1896, independent, de Charles de la Vallée-Poussin și Jacques Hadamard. Ei au arătat că zerourile trebuie să se afle în interiorul fâșiei (astfel încât x nu poate fi egal cu 0 sau cu 1). În 1914, matematicianul englez G.H. Hardy a demonstrat că, de-a lungul liniei $x = 1/2$, se află o infinitate de zerouri, chiar dacă asta nu înseamnă că nu există o infinitate de zerouri și în afara ei.

Atât cât de departe merg rezultatele numerice, zerourile non-triviale calculate în 1986 (1 500 000 000 dintre ele) se află într-adevăr pe linia $x = 1/2$, iar calculele la zi au verificat

că lucrurile stau la fel pentru primele 100 de miliarde de zerouri. Chiar dacă aceste rezultate experimentale sugerează că ipoteza Riemann este rezonabilă, există totuși și posibilitatea ca ea să fie falsă. Conjectura este că toate zerourile se află pe linie, dar asta încă așteaptă o demonstrație sau o negație.

DE CE ESTE IMPORTANTĂ IPOTEZA RIEMANN?

Există o conexiune neașteptată între funcția zeta Riemann $\zeta(s)$ și teoria numerelor prime (vezi p. 36). Numerele prime sunt 2, 3, 5, 7, 11 ș.a.m.d., numere divizibile doar cu 1 și cu ele însele. Folosind numerele prime, putem forma expresia:

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\times\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\times\ldots$$

care se dovedește a fi o altă modalitate de a scrie $\zeta(s)$, funcția zeta Riemann. Aceasta ne spune că o mai bună cunoaștere a funcției zeta Riemann va clarifica distribuția numerelor prime și ne va ajuta să înțelegem mai bine elementele de bază ale matematicii.

În 1900, David Hilbert a enunțat celebrele 23 de probleme pe care matematicienii le aveau de rezolvat. Despre problema a opta, el a spus: „Dacă ar fi să mă trezesc dintr-un somn de 500 de ani, prima mea întrebare ar fi dacă a fost demonstrată ipoteza Riemann!"

Hardy a folosit ipoteza Riemann ca asigurare când a traversat Marea Nordului, după vizita de vară făcută prietenului lui, Harald Bohr, în Danemarca. Înainte să plece din port i-a trimis lui Bohr o carte poștală în care susținea că tocmai demonstrase ipoteza Riemann. Era un pariu foarte isteț. Dacă se scufunda vaporul, s-ar fi ales cu onoarea postumă de a fi rezolvat marea problemă. Pe de altă parte, Dumnezeu nu ar fi lăsat ca un ateu ca Hardy să se bucure de această onoare și ar fi prevenit, așadar, scufundarea vaporului.

Cel care va reuși să rezolve riguros problema va câștiga premiul de un milion de dolari oferit de Institutul Clay de Matematică. Dar nu banii sunt aici principalul factor – matematicienii s-ar mulțumi, în caz de reușită, cu poziția ocupată în panteonul marilor matematicieni.

Idee de bază
provocarea supremă

Glosar

algebră Operând cu litere în loc de numere într-un fel de aritmetică extinsă, algebra este acum o metodă generală, aplicabilă întregii matematici și aplicațiilor acesteia. Cuvântul „algebră” derivă din al-jabr, folosit într-un text arab din secolul al IX-lea d.Hr.

algoritm O rețetă matematică: o procedură prestabilită pentru rezolvarea unei probleme.

Argand, diagramă O metodă vizuală pentru prezentarea planului bidimensional al numerelor complexe.

axiomă O afirmație pentru care nu este căutată nici o justificare, folosită pentru a defini un sistem. Termenul „postulat” servea aceluiași scop pentru grecii din Antichitate, iar pentru ei era un adevăr evident.

bază Fundamentul unui sistem de numerație. Babilonienii își bazau sistemul de numerație pe 60, în timp ce baza modernă este 10 (sistemul zecimal).

cardinalitate Numărul de obiecte dintr-o mulțime. Cardinalitatea mulțimii {a, b, c, d, e} este 5, dar cardinalitatea poate căpăta sens și în cazul mulțimilor infinite.

cel mai mare divizor comun (CMMDC) CMMDC pentru două numere este cel mai mare număr la care amândouă se împart exact. De exemplu, 6 este CMMDC pentru 18 și 84.

comutativă Înmulțirea în algebră este comutativă dacă $a \times b = b \times a$ (de exemplu, $2 \times 3 = 3 \times 2$). Nu este cazul în multe domenii ale algebrei moderne (algebra matriceală, de exemplu).

conică, secțiune Numele colectiv dat familiei clasice de curbe care include cercul, linia dreaptă, elipsa, parabola și hiperbola. Fiecare dintre aceste curbe poate fi găsită ca secțiune transversală a unui con.

contraexemplu Un singur exemplu care contrazice o afirmație. Se poate demonstra că afirmația „Toate lebedele sunt albe” este falsă prezentând o lebădă neagră, drept contraexemplu.

corespondență unu-la-unu (bijectivitate) Natura relației atunci când fiecare obiect dintr-o mulțime corespunde unui obiect, și numai unuia, dintr-o altă mulțime, și invers.

corolar O consecință minoră a unei teoreme.

cuadratura cercului Problema construirii unui pătrat care să aibă aceeași suprafață ca un cerc dat, folosind doar o riglă și un compas. Nu este posibil.

cuaternioni Numere imaginare cvadridimensionale, descoperite de W.R. Hamilton.

derivata Operația de bază din calculul diferențial, care produce o derivată sau o rată a schimbării. Pentru o expresie care descrie în ce mod depinde distanța de timp, de exemplu, derivata reprezintă viteza. Derivata expresiei pentru viteză reprezintă accelerația.

diofantică, ecuație O ecuație în care soluțiile trebuie să fie numere întregi sau poate fracții. Numită după matematicianul grec Diophantus din Alexandria (cca 250 d.Hr.).

discret Termen folosit în opoziție cu continuu. Există spații libere între valorile discrete, cum ar fi spațiile libere dintre numerele întregi 1, 2, 3, 4.

distribuția Rata probabilităților evenimentelor care apar într-un experiment sau într-o situație. De exemplu, distribuția Poisson dă probabilitățile a x apariții ale unui eveniment rar, pentru fiecare valoare a lui x.

divizor Un număr întreg la care un alt număr întreg se împarte exact. Numărul 2 este un divizor al lui 6, deoarece $6 \div 2 = 3$. Așadar, 3 este un altul, deoarece $6 \div 3 = 2$.

exponent O notație folosită în aritmetică. Înmulțirea unui număr cu el însuși, 5×5, se scrie 5^2, unde 2 este exponentul. Expresia $5 \times 5 \times 5$ se scrie 5^3 ș.a.m.d. Notația poate fi extinsă: de exemplu $5^{1/2}$, înseamnă rădăcina pătrată a lui 5. Termeni echivalenți sunt putere și indice.

fracție Un număr întreg divizat la un altul, de exemplu $\frac{3}{7}$.

gemene, prime Două numere prime separate de cel mult un număr. De exemplu, 11 și 13 sunt gemene. Nu se știe dacă există o infinitate de astfel de gemene.

geometria Tratând proprietățile liniilor, formelor și spațiilor, subiectul a fost expus formal în Elementele lui Euclid, în secolul al III-lea î.Hr. Geometria s-a infiltrat în toată matematica și și-a depășit astăzi înțelesul istoric restrictiv.

hexazecimal, sistem Un sistem de numerație cu baza 16, bazat pe 16 simboluri, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E și F. Este folosit pe scară largă la computere.

imaginare, numere Numere în care apare „imaginarul" $i = \sqrt{-1}$. Când sunt combinate cu numere obișnuite („reale"), ajută la formarea numerelor complexe.

integrare Operațiune de bază din calculul diferențial și integral, care măsoară aria. Se poate arăta că este inversul operațiunii de derivare.

ipoteză O tentativă de afirmație, așteptând să fie confirmată sau negată. Are același statut matematic precum conjectura.

iraționale, numere Numere care nu pot fi exprimate ca fracție (de exemplu, rădăcina pătrată a lui 2).

iterație Repetarea unei operațiuni, începând cu o valoare a. De exemplu, dacă începem cu 3 și adunăm repetat 5, obținem secvența de iterații 3, 8, 13, 18, 23, ...

lemă O afirmație demonstrată ca o punte intermediară spre demonstrarea unei teoreme majore.

matrice O aranjare de numere sau simboluri aranjate în formă de pătrat sau dreptunghi. Matricele pot fi adunate și înmulțite, formând un sistem algebric.

mulțime O colecție de obiecte: de exemplu, mulțimea pieselor de mobilier ar putea fi F = {scaun, masă, canapea, fotoliu, dulap}.

mulțime vidă Mulțime care nu conține nici un obiect. Notată tradițional cu ∅, este un concept foarte util în teoria mulțimilor.

numitor Partea de jos a unei fracții. În fracția $^3/_7$, numărul 7 este numitorul.

numărător Partea superioară a unei fracții. În fracția $^3/_7$, numărul 3 este numărătorul.

optimă, soluție Multe probleme cer soluția optimă, sau cea mai bună. Aceasta poate fi o soluție care minimizează costurile sau maximizează câștigurile, așa cum se întâmplă în programarea liniară.

pătrat, număr Rezultatul înmulțirii unui număr cu el însuși. Numărul 9 este un număr pătrat deoarece 9 = 3 × 3. Numerele pătrate sunt 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,...

pătrată, rădăcină Numărul care, atunci când este înmulțit cu el însuși, dă un număr dat. De exemplu, 3 este rădăcina pătrată a lui 9 deoarece 3 × 3 = 9.

Pitagora, teorema lui Dacă laturile unui triunghi dreptunghic au lungimile x, y și z, atunci x2 + y2=z2, unde z este latura cea mai lungă (ipotenuza), opusă unghiului drept.

poliedru O formă solidă cu mai multe fețe. De exemplu, un tetraedru are patru fețe triunghiulare, iar un cub are șase fețe pătrate.

pozițional, sistem Mărimea unui număr depinde de poziția cifrelor. În numărul 73, valoarea lui 7 înseamnă „7 zeci", iar 3 înseamnă „3 unități".

prim, număr Un număr întreg care are drept divizori doar numărul 1 și pe el însuși. De exemplu, 7 este un număr prim, dar nu și 6 (deoarece 6 = 2 × 3). Obiceiul este să se înceapă șirul numerelor prime cu 2.

raționale, numere Numere care sunt fie întregi, fie fracții.

rest Dacă un număr întreg este împărțit la un alt număr întreg, rezultatul poate fi exprimat ca un număr întreg și o parte numită rest. Numărul 17 împărțit la 3 dă rezultatul 5, rest 2.

serie O înșiruire, posibil infinită, de numere sau simboluri însumate.

simetrie Regularitatea unei forme. Dacă o formă poate fi rotită astfel încât să revină pe amprenta originală, spunem că are simetrie rotațională. O figură are simetrie în oglindă dacă reflexia ei se potrivește cu amprenta originală.

sistem numeric binar Un sistem numeric bazat pe două simboluri, 0 și 1, fundamental pentru calculele pe computer.

șir O înșiruire, posibil infinită, de numere sau simboluri.

teoremă Termen rezervat pentru un fapt stabilit, cu anumite consecințe.

Teoria haosului Teoria sistemelor dinamice care par aleatorii, dar au o regularitate subiacentă.

transcendental, număr Un număr care nu poate fi soluția unei ecuații algebrice, cum ar fi a + bx + c = 0, sau unde x are o putere și mai mare. Numărul π este un număr transcendental.

unitare, fracții Fracții care au numărătorul egal cu 1. Sistemul de numerație din Egiptul antic era bazat, parțial, pe fracții unitare.

Venn, diagramă O metodă picturală (diagramă balon) folosită în teoria mulțimilor.

x-y, axe Idee datorată lui René Descartes de a desena puncte într-un sistem de coordonate x (pe axa orizontală) și y (pe axa verticală).

Indice

Numerele de pagină **bold** indică o intrare în glosar

Abel, Niels 58, 154
ADN 89, 151
adunare
  fracțiilor 13–14
  numerelor imaginare 33–34
  matricilor 156–157
  zero 5, 7
algebră 56–59, **204**
  grupuri abstracte 154
  curbe 90
  ultima teoremă a lui Fermat 196–199
  genetica 148
  matrici 58, 156–159, **205**
  triunghiul lui Pascal 53
  și topologie 95
algoritmi 60–63, 187, **204**
arbori 118, 119
Argand, diagrama 34–35, **204**
argumentație 64
Arhimede din Siracuza 20–21
aria
  cercul 21
  cel mai mare divizor comun 61
  poligoane 113
  triunghi 87
  sub curbă 79
Aristotel 64–65
aur, dreptunghiuri de 48–51
aur, proporția de (φ) 46–47, 50
axiome 59, 72, 74, 109, 127, 154, 155, **204**

Bayes, teoria lui 128–131
baza 10 8, 10, 11, **204**
baza 60 8, **204**
Benford, Frank 136, 138
Bernoulli, Jacob 24, 89
binar, sistem 11, 160–162, **204**
Bourbaki, Nicholas 72
Brianchon, teorema lui 115

calcul diferențial și integral 76–79
Cantor, Georg 28–31, 72, 73, 75
cardinalitate 29–30, 74–75, **204**
catenară, curbă 90
Cayley, Arthur 35, 98, 102, 119, 121, 153–154

călătorie/transport 159, 183
cel mai mare divizor comun (CMMDC) 61–63, **204**
cel mai mare factor comun 61
cel mai mic multiplu comun (CMMMC) 61
cerc 88, 109, 111, 115
  și (π) 20–21
  cuadratură 22, 81–82, **205**
Cezar, Iuliu 160, 162
clădiri
  proporția de aur 50, 51
  cu triunghiuri 87
coduri 160–163
coincidență 135
combinatorică 164–167, 187
comis-voiajor 184–187
complexe, numere 32–35
compusă, dobândă 176–179
comutativă **204**
conice, secțiuni 88–90, 115, **204**
construcții 80–83
continuum(ului), ipoteza 75
contraexemplu 69, **204**
corelație 144–146
corolar **204**
criptare 160–163
cuadratice, ecuații 57–58
cuadratura cercului 22, 81–83, **205**
cuaternioni 58–59, **205**
cub, numere la 81, 93, 96, 98, 196
culoare
  problema celor patru culori 120–123
  genetica 148–149
curbe 88–91
  algebrice 90
  calcul diferențial și integral 79
  fulgul de zăpadă Koch 102, 103
  normale 140–143

da Vinci, Leonardo 89, 96
date, conexiune între 144–147
De Morgan, Augustus 66, 70, 73, 120
deficiente, numere 41
demonstrație 68–71, 85, 123
derivare 76, 77–78, **204**
Descartes, René 32, 43, 89, 90
detectarea erorilor, coduri 161

dietei, problema 180–183
difuză, logică 67
dimensiuni 96–99
  fracționale 99, 103
diofantice, ecuații 62–63, 196, 197, **204**
directă, metoda 69–70
discret **204**
discretă, geometrie 112–115, 187
distribuții 136–139, 140, **204**
divizor **204**
dobândă 25, 176–179
dodecaedru 93
dreptunghiuri de aur 48–51
Dudeney, Henry 176, 179
Dürer, Albrecht 169–170

e 24–27
ecuații 56–58, 62–63, 90, 196
egipteni 8, 15, 165
Einstein, Albert 97, 111, 113, 177, 182, 194–195
elipsă 88, 89, 115
Euclid din Alexandria
  algoritm 60–63
  construcția poligoanelor 82, 83
  numere perfecte 40, 43
  postulate 108–111
  numere prime 38
  QED 70
  triunghiuri 84, 85
Euler, Leonhard
  e 26, 27
  linie Euler 85–86
  formula lui Euler 93–94, 163
  ultima teoremă a lui Fermat 198
  grafuri 116–117
  pătrat latin 172–173, 174
  numere perfecte 43
  și (π) 21–22
  pătrate la pătrat 170
exponent **204**

factoriale, numere 165–166
Fano, plan 114
Fermat, Pierre de
  ultima teoremă a lui Fermat 170, 196–199
  numere prime 39, 83
  probabilitate 125
Fibonacci, șir 44–47, 54
financiară, matematică
  problema dietei 180–183
  dobânda 176–179

fluture, efect 104–105, 107
fractali 54, 99, 100–103, 107
fracții 8, 12–15, 204
  conversia la zecimale 14–15
  numărare 30
  ipoteza Riemann 200–203
  rădăcini pătrate 18–19
fracțională, dimensiune 103
Franklin, Benjamin 170

Galileo 77, 78, 192, 193
Galton, Francis 121, 144, 146
Gauss, Carl Friedrich 37, 39, 83, 110, 140
Gelfond, constanta lui 26
genetică 148–151
geometrie 204
  dimensiune 96–99
  discretă 112–115
  eliptică 111
  euclidiană 108–110, 114
  hiperbolică 110
  postulatul paralelei 75, 108–111
  proiectivă 114
  topologie 92–95, 99
gogoașă 92, 94, 122
Goldbach, conjectura 38–39
Gödel, teorema lui 74, 75
grafuri 116–119, 123
Grassmann, Hermann 59, 98
gravitație 77–79, 195
grupurilor, teoria 59, 152–155, 167

Halmos, Paul 70, 123
Hamilton, sir William Rowan 34–35, 58–59
haos, teoria 104–107, **204**
Hardy, G.H. 149–151, 168, 202, 203
hărți, patru culori 120–123
hârtie, dimensiuni 48–49
Heawood, Percy 121, 122
hexazecimal, sistem 204
hieroglife 15
Hilbert, David 75, 99, 203
hiperbolă 88, 115
hiperspațiu 97–98

i 33–34
icosaedru 93
imaginare, numere 32–35, **204**
indirectă, metoda 70
indo-arabe, numere 4, 8
infinit (∞) 6, 28–31

integrare 76, 79, 205
ipoteză **204**
iraționale, numere 19, 21, 25, 30–31, **205**
iterație 100–101
împărțire
  algoritmul lui Euclid 61–63
  zero 6, 7
înmulțire
  fracții 13–14
  numere imaginare 33–34
  matrici 157–158
  zero 5

jocuri de noroc 125–126, 137, 143
jocurilor, teoria 188–191
Jordan, Camille 90–91

Kirkman, Thomas 114, 167
Klein, sticla 94, 95
Koch, fulg de zăpadă 102, 103

Lagrange, Joseph 39, 194
Laplace, marchiz Pierre-Simon de 104, 140
latine, pătrate 167, 172–175
Legendre, Adrien-Marie 109, 198
Leibniz, Gottfried 55, 76, 78, 79
lema **205**
lemniscată 90
Leonardo din Pisa (Fibonacci) 4, 44–47, 54
limaçon 90
limita centrală, teorema 141, 142
liniară, programare 182–183
liniare, ecuații 56–57
Lo Shu, pătrat 168–169
logaritm 24
logaritmică, spirală 89
logică 64–67, 68
lumina, viteză de propagare 193–194

magice, pătrate 168–171
Mandelbrot, mulțime 100–101
matematică, inducție 70–71
matrici 58, 156–159, **205**
medii 141–142
Mendel, Gregor 148
Mersenne, numere 42–43
minimax, teoremă 188, 191
mișcare 77–79, 192–195
mnemonică, pi 23
Möbius, banda 94
Morse, codul 180
multidimensional 95
mulțime vidă 7, **204**
mulțimi 7, 28–29, 67, 72–75, **205**

Napoleon, teorema lui 86
Nash, John F. 189
Navier–Stokes, ecuațiile 107
negative, numere 32–33, 58
Newton, Isaac 76, 78, 90, 193, 195
non-planare, grafuri 118
normală, curbă 140–143
numărare 4, 28–29, 30, 119, 164–167
numărător 12, **205**
numerație, sistem de 8–11
Numerele de pagină bold indică o intrare în glosar
numerologie 39, 42
numitor 12, **204**

octaedru 93
oglindă, simetrie în 152
optimă, soluție **205**

parabolă 17, 88, 89, 115
paralelă, postulat 75, 108–111
paralele, drepte 108, 114, 115
Pascal, Blaise
  teorema lui Pascal 115
  triunghiul lui Pascal 53–55, 143
  probabilitate 125
pătrată, rădăcină 17–19, **206**
pătrate
  latine 167, 172–175
  magice 168–171
pătrate, numere 16–17, 39, 120, 196–198, **205**
patru culori, problema celor 120–123
Pearson, corelația lui 144–145
pendul 105–106
perfecte, numere 40–43
pi (π) 20–23
Pick, teorema lui 113
Pitagora 16, 40, 41, 89, 200
  teoremă 18, 84–85, **205**
poduri, grindă Warren 87
Poincaré, Henri 95, 102
Poisson, distribuție 137, 139
poliedre 92–94, **206**
poligoane 16, 21, 82–83, 113
polinomial, timp 187
pozițional, sistem 8, **205**
predicție 106, 139
prietene, numere 42
prime gemene 38–39, **206**
prime, numere 36–39, 43, 83, 203, 204, **205**
prizonierului, dilema 191
probabilitate 124–127
  teoria lui Bayes 128–131
  problema zilei de naștere 132–135
  condiționată 128–129
  distribuții 136–139
  e 27
  genetică 148–151
  curbă normală 142–143

raționale, numere 13, **205**
reale, numere 30–31, 72
regresie 144, 146–147
relativitate 111, 192–195
rest **205**
Riemann, Bernhard
  geometrie eliptică 111
  ipoteza Riemann 200–203
romane, cifre 8–10
rotațională, simetrie 152–153
Russell, Bertrand 73–74

scădere, zero 5
serie **205**
sfere 94, 95, 98
sfere fațetate 93
Sierpinski, covorul lui 54, 102
silogism 65
simetrie 152–155, **205**
spațiu-timp 97, 99, 111, 195
Spearman, corelația lui 145–146
spirală logaritmică 89
statistică
  colectarea datelor 144–147
  curbă normală 140–143
  probabilitate 128, 136–138
Steiner, Sistem Triplu (STS) 115
Stokes, George Gabriel 107
Sudoku 172
superproporția de aur 47, 51
supraabundente, numere 40–41
șansă 124, 128, 132
șir **205**
științifică, notație 11

teoremă 68, 70, **205**
teorema chinezească a resturilor 63
teorema strângerii de mână 117–118
teoria corzilor vibrante 97, 99
tetraedru 93
topologie 92–95, 99
tor 122
trei bare, mișcare 90
triangulare, numere 16–17
trigonometrie 84, 86
tripod 152, 154
triskelion 152–154
triunghiuri 86–87
  construire 82
  geometrie eliptică 111
  plan Fano 114
  Pascal, ale lui 52–55
  covorul lui Sierpinski 102
  simetrie 154

unghiuri
  postulatele lui Euclid 109
  măsurarea 8
  trisectoarea 80–81
unitar 85
unitate, fracții **205**
unu-la-unu, corespondență 28, 30, **205**

Venn, diagramă 72, 129, **205**
Von Lindemann, Ferdinand 22, 26, 82, 199
Von Neumann, John 188
vreme, prognoza 104, 106–107

Weinberg, Wilhelm 148–151
Wiles, Andrew 196, 199

x-y, axe **205**

zecimale, numere 10–11
  convertirea fracțiilor 14–15
  origini 8
Zermelo-Fraenkel, axiomele 74, 75
zero 4–7, 10, 202
zeta, funcție 202–203
zi de naștere, problema 132–135

50 Mathematical Ideas You Really Need to Know
Tony Crilly

Copyright © 2007 Tony Crilly
Ediție publicată pentru prima dată în 2007
Toate drepturile rezervate

Tony Crilly și-a declarat drepturile pentru
a fi identificat ca autor al acestei cărți.

Ediție publicată pentru prima dată în 2007
Toate drepturile rezervate

Credite foto: p.101 iStockphoto
Ilustrații și diagrame:
Tony Crilly și Patrick Nugent

Nici o parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă, stocată într-un sistem de regăsire a datelor sau transmisă în nici o formă și prin nici un mijloc, electronic, mecanic, prin fotocopiere, înregistrare sau altfel, fără permisiunea scrisă a deținătorului drepturilor de autor.

Editura Litera
O.P. 53, C.P. 212, sector 4, București, România
tel.: 021 319 6390; 031 425 1619; 0752 548 372
e-mail: comenzi@litera.ro

Ne puteți vizita pe

www.litera.ro

50 de idei pe care trebuie să le cunoști. Matematică
Tony Crilly

Copyright © 2017, 2019 Grup Media Litera
pentru versiunea în limba română
Toate drepturile rezervate

Traducere din limba engleză: Corina Hădăreanu

Editor: Vidrașcu și fiii
Redactor: Olimpia Novicov
Corector: Elena Anca Coman
Copertă: Flori Zahiu
Tehnoredactare și prepress: Bogdan Coscaru

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
CRILLY, TONY
50 de idei pe care trebuie să le cunoști. Matematică /
Tony Crilly; trad.: Corina Hădăreanu. –
București: Litera, 2017
ISBN 978-606-33-2298-3
ISBN EPUB 978-606-33-5702-2

I. Hădăreanu, Corina (trad.)

821.111(73)-31=135.1